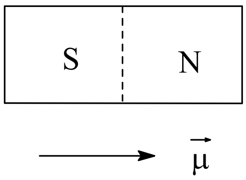
3 Magnetfelder

3.1 Magnetostatik

3.1.1 Magnetische Dipole

Elektrostatik: Es gibt einzelne elektrische Ladungen, die aufeinander Kräfte ausüben. Sie können isoliert auftreten. Ladungen können positiv oder negativ sein.

Magnetostatik: Es gibt "magnetische Ladungen", die ebenfalls unterschiedliche Vorzeichen haben, aber nie isoliert vorkommen, sondern nur als Dipole (magnetische Dipole).



Stabmagnet

Ladungen $\hat{=}$ Südpol und Nordpol
Magnetisches Dipolmoment: $\vec{\mu}$

Beobachtungen:
1. Magnetische Dipole erzeugen ein magnetisches Feld $\vec{B}$ analog zum elektrischen Feld $\vec{E}$, das von elektrischen Dipolen hervorgerufen wird.
2. Äußere magnetische Felder üben auf einen magnetischen Dipol ein Drehmoment $\vec{D}$ aus.

3.1.2 Das Kraftgesetz

Untersuchungen dazu um 1820 von Biot, Savart, Ampère

In der Elektrostatik wurde das elektrische Feld durch die messbare Kraft $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ auf eine Probeladung q definiert. Analog dazu definieren wir das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ durch messbare Kräfte auf Ströme.

Betrachten: dünner, stromdurchflossener Leiter; der Draht ruht, der Strom $\vec{I}$ ist konstant.

Bei Anwesenheit anderer stromdurchflossener Leiter stellt man fest, dass auf den Draht Kräfte wirken. Auf ein kleines Wegelement $d\vec{l}$ des Drahtes wirkt eine Kraft $d\vec{F}$, für die gilt:

$$dF \propto I\,, \quad dF \propto dl\,, \quad d\vec{F} \perp d\vec{l}\ .$$

Die Kraft $d\vec{F}$ kann daher in folgender Form geschrieben werden:

$$d\vec{F}(\vec{r}) = \frac{I}{c}\, d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r}). \qquad \text{1. Ampèresches Gesetz} \qquad (3.1)$$

Das ist auch die Definition des Vektorfeldes $\vec{B}(\vec{r})$ als Messgröße.

Die Definition enthält noch eine Konstante (c). Diese Konstante ist die Lichtgeschwindigkeit.

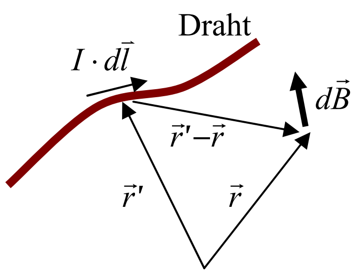
$$c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

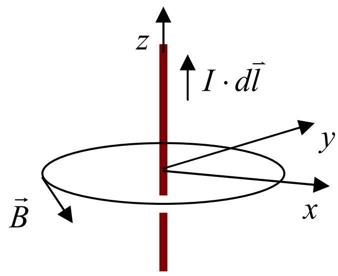
Die Dimension der Konstanten impliziert, dass $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in gleichen Einheiten gemessen werden, denn $\left[I \cdot d\vec{l} / c\right] = [q]$; die Größe der Konstanten impliziert, dass $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in einer elektromagnetischen Welle gleichgroße Amplituden haben (später).

Das durch (3.1) definierte Feld $\vec{B}(\vec{r})$ wird
- magnetische Induktion
- magnetische Flussdichte

genannt.
Eigentlich wäre magnetische Feldstärke sinnvoll wegen Vergleichbarkeit mit $\vec{E}$, aber wir werden später bei der Behandlung von Materie sehen, dass die magnetische Feldstärke $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$ mit der Magnetisierung $\vec{M}$ ist.

Nachdem $\vec{B}$ als Messgröße festgelegt ist, soll bestimmt werden, welches Magnetfeld durch einen stromdurchflossenen Leiter hervorgerufen wird.





Das Stromelement $I \cdot d\vec{l}$ am Ort $\vec{r}'$ erzeugt am Ort $\vec{r}$ einen Beitrag $d\vec{B}$ zum Magnetfeld, der senkrecht zu $d\vec{l}$ und zu $\vec{r} - \vec{r}'$ ist. Summiert man alle Beiträge für einen unendlich langen, geraden Draht, dann ergeben sich Kreise als Feldlinien.

Also:
Drahtstück $d\vec{l}$ am Ort $\vec{r}'$ ist von Strom I durchflossen → ruft am Ort $\vec{r}$ Beitrag $d\vec{B}$ hervor, für den gilt:

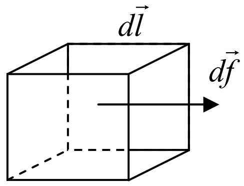
$$dB \propto I \cdot dl\,, \quad d\vec{B} \perp d\vec{l}\,, \quad d\vec{B} \perp |\vec{r} - \vec{r}'|$$

$$dB \propto 1 \big/ |\vec{r} - \vec{r}'|^2\,, \quad dB \propto \sin\left(\angle\left(d\vec{l}, \vec{r} - \vec{r}'\right)\right)$$

Lässt sich zusammenfassen zu

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I}{c} d\vec{l} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}. \qquad \text{Biot-Savart-Gesetz in differentieller Form} \qquad (3.2)$$

Für kontinuierlich verteilte Ströme gilt:



$$I d\vec{l} = \frac{I}{\Delta f} d\vec{l} \cdot \Delta f = j d\vec{l} \cdot \Delta f = \vec{j} dl \cdot \Delta f \qquad (3.3)$$

$$I d\vec{l} = \vec{j} dV \qquad (3.4)$$

Einsetzen von (3.1) in (3.2) ergibt unter summieren aller Beiträge (integrieren):

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}) \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dV'. \qquad \text{Biot-Savart-Gesetz in integraler Form} \qquad (3.5)$$

Aus einer gegebenen stationären Stromverteilung kann so das Magnetfeld berechnet werden.

Beachte: Analogie zu $\vec{E}(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\rho(r')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dV'$ aus der Elektrostatik

Beispiele zur Anwendung

Kraft auf Punktladung

Die Kraftdichte, die ein Magnetfeld $\vec{B}$ auf eine Stromverteilung ausübt, ist

$$\vec{f}(\vec{r}) = \frac{d\vec{F}}{dV} = \frac{I}{c} \frac{d\vec{l}}{dV} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}). \qquad (3.6)$$

Für die Stromdichte

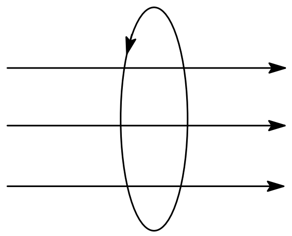
$$\vec{j}(\vec{r}) = q \cdot \vec{v} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \qquad (3.7)$$

einer bewegten Punktladung ergibt dies die Kraftdichte $\vec{f}(\vec{r}) = \vec{F} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ mit

$$\boxed{\vec{F} = q \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}(\vec{r})} \qquad \text{Lorentzkraft} \qquad (3.8)$$

Dies ist die Kraft $\vec{F}$ auf eine Punktladung bei $\vec{r}_0$, die sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}_0$ bewegt. Zeigt $\vec{v}$ in *x*- und $\vec{B}$ in *y*-Richtung, dann wirkt die Kraft $\vec{F}$ in *z*-Richtung.

(Entspricht der Kraft $\vec{F} = q\vec{E}$ aus Elektrostatik.)



In einem homogenen Feld entsteht eine Kreis- oder Spiralbewegung.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{c}\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) \qquad \Big|\cdot\vec{v}$$

$$m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(v^2\right) = \frac{q}{c}\vec{v}\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) = 0$$

$\Rightarrow \quad v^2 = \text{konst.}$, d.h. Betrag der Geschwindigkeit bleibt konstant.

Es gilt für $t = 0$: $\quad \vec{v}_0 \perp \vec{B}$

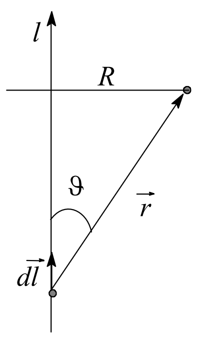
Wegen $d\vec{v}\perp\vec{B}$ gilt somit $\vec{v}\perp\vec{B}$ auch im weiteren Zeitverlauf.

hier: $\quad F = \dfrac{q\cdot v\cdot B}{c} = \dfrac{mv^2}{R} \qquad$ ($\triangleq$ Zentrifugalkraft)

$$R = \frac{m\cdot v^2\cdot c}{q\cdot B\cdot v} = \frac{m\cdot v\cdot c}{q\cdot B}$$

wegen $v = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad R = \text{konst.}$, d.h. Kreisbewegung.

Magnetfeld eines ∞ langen Leiters im Abstand *R*



Aus Symmetriegründen kann $\vec{B}$ nur vom Abstand R abhängen. $\vec{B}$ entlang des Leiters ist überall gleich. Wir berechnen $\vec{B}$ an der Stelle l im Abstand R.
$l^2 + R^2 = r^2$

$$\vec{B} = \frac{I}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} \quad ; \quad \left|\vec{B}\right| = B = \frac{I}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dl\cdot r\cdot\sin\vartheta}{r^3}$$

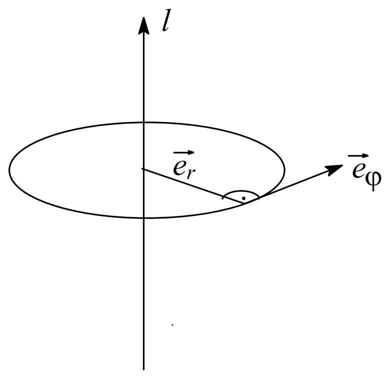
$$r \sin\vartheta = R \quad ; \quad B = \frac{I \cdot R}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{\left(l^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

$$B = \frac{I \cdot R}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{R^3 \left(\sqrt{1 + l^2 / R^2}\right)^3}$$

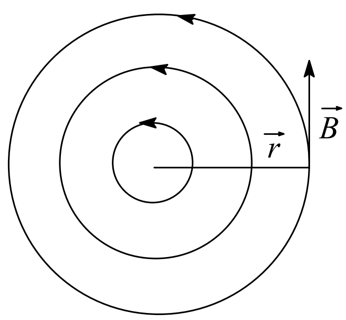
$$B = \frac{I}{c} \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl/R}{\left(\sqrt{1 + l^2 / R^2}\right)^3} \quad ; \quad l/R = x$$

$$B = \frac{I}{c \cdot R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(\sqrt{1 + x^2}\right)^3} = \frac{I}{c \cdot R} \left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \right)_{-\infty}^{\infty}$$

$$B = \frac{2 \cdot I}{c \cdot R} \tag{3.9}$$



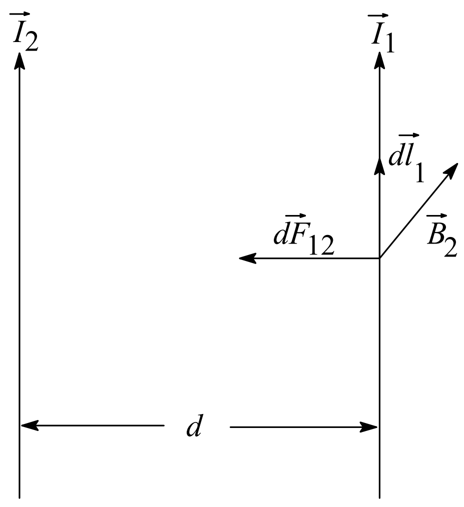
von oben



Feldlinien sind konzentrische Kreise. Vektorform: $\vec{B} = \frac{2 \cdot I}{c \cdot R} \vec{e}_\varphi = \frac{2\vec{I} \times \vec{e}_r}{c \cdot R}$ (3.10)

Kraft zwischen zwei parallelen Leitern

Berechnen Kraft zwischen zwei parallelen, unendlich langen, geraden Drähten im Abstand d. Betrachten ein Wegelement dl_1 des ersten Drahtes. Die anderen Wegelemente desselben Drahtes bewirken kein Feld an dieser Stelle, da sie parallel zu dl_1 sind. Also wirkt nur das Feld des anderen Drahtes, das den Betrag $B_2 = \frac{2I_2}{cd}$ hat und senkrecht zum Draht steht.



$$d\vec{F}_{12} = \frac{I_1}{c}\left(d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2\right) \tag{3.11}$$

Anziehungskraft, wenn Ströme parallel gerichtet.
Abstoßungskraft, wenn antiparallel.

Da $\vec{B}_2 \perp d\vec{l}_1$, gilt

$$dF_{12} = \frac{I_1 dl_1 \cdot B_2}{c} = dl_1 \frac{I_1}{c} \cdot \frac{2I_2}{c \cdot d}$$

Kraft pro Längeneinheit dl_1 von Leiter 1

$$\frac{dF_{12}}{dl_1} = \frac{2I_1 I_2}{c^2 \cdot d} = \frac{dF_1}{dl_1} = \frac{dF_2}{dl_2} \tag{3.12}$$

Falls beide Leiter ∞ lang: Gesamtkraft $\to \infty$.

3.2 Feldgleichungen der Magnetostatik

3.2.1 Das 2. Ampèresche Gesetz

Es galt Gleichung (3.5)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int d\vec{B} = \frac{1}{c}\int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} dV'$$

Für die weitere Umformung benötigen wir die Beziehung

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right) = \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = -\frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}, \tag{3.13}$$

wobei der Nabla-Operator nur auf $\vec{r}$ wirkt. Damit können wir das *B*-Feld wie folgt schreiben:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{1}{c}\int_{V'}\left\{\vec{j}(\vec{r}\,')\times\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right\}dV' \tag{3.14}$$

Wir benutzen aus der Vektoranalysis die Beziehung

$$\operatorname{rot}(a\cdot\vec{u}) = \nabla\times(a\cdot\vec{u}) = a\cdot\operatorname{rot}\vec{u} + (\operatorname{grad} a)\times\vec{u}$$

sowie die Eigenschaft $\operatorname{div}\vec{j} = 0$. Damit folgt:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot}\left\{\frac{1}{\mathrm{c}}\int_{V'}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'\right\}. \tag{3.15}$$

Die Divergenz einer Rotation verschwindet stets, so dass aus (3.15) folgt:

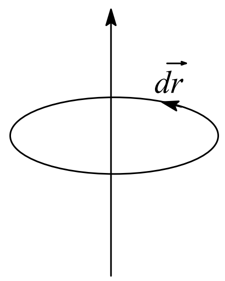
$$\operatorname{div}\vec{B}(\vec{r}) = 0\,. \tag{3.16}$$

(Im Gegensatz zur Elektrostatik, wo gilt $\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho$.)

Für einen ∞ langen geraden Leiter hatten wir abgeleitet:

$$B = \frac{2\cdot I}{c\cdot R}$$

$$B\cdot 2\pi R = \frac{4\pi\cdot I}{c}$$



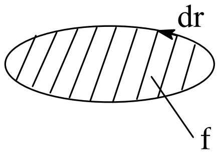
Spezialfall von

$$\oint \vec{B}\,d\vec{r} = \frac{4\pi I}{c} \quad \text{(Linienintegral)} \qquad \text{2. Ampèresches Gesetz in integraler Form} \tag{3.17}$$

Die Allgemeingültigkeit soll hier nicht bewiesen werden (folgt direkt aus (3.15)).

Für kontinuierlich verteilte Ströme gilt:

$$I = \int_f \vec{j}(\vec{r}\,')\,d\vec{f}\,'$$



$$\oint_C \vec{B}\,d\vec{r} = \frac{4\pi}{c}\int_f \vec{j}(\vec{r}\,')\,d\vec{f}\,'$$

Umformung mithilfe des Stokesschen Satzes:

$$\int_f \mathrm{rot}\,\vec{B}\,d\vec{f} = \frac{4\pi}{c}\int_f \vec{j}(\vec{r}\,')\,d\vec{f}\,'$$

und somit

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}}$$ 2. Ampèresches Gesetz in differentieller Form (3.18)

Gegenüberstellung der Grundgleichungen der Elektrostatik und der Magnetostatik:

ES:	$\mathrm{div}\,\vec{E} = 4\pi\rho$	$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$
MS:	$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$	$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$
ES:	$\oint_f \vec{E}\,d\vec{f} = 4\pi\rho$	$\oint_C \vec{E}\,d\vec{r} = 0$
MS:	$\oint_f \vec{B}\,d\vec{f} = 0$	$\oint_C \vec{B}\,d\vec{r} = \frac{4\pi I}{c}$

3.2.2 Das Vektorpotential

Es galt (3.15): $\vec{B}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\left\{\frac{1}{c}\int_{V'}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'\right\}$

$\vec{B}$ kann dargestellt werden als Rotation eines Vektorfeldes:

$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$ $\vec{A}$: **Vektorpotential** (3.19)

In Analogie zum elektrischen Potential φ:

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi$$

Kennt man φ, läßt sich $\vec{E}$ berechnen:

$$\varphi = \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

φ ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Ähnlich für das magnetische Potential. Da allgemein $\text{rot grad}\,\psi = 0$ gilt, folgt

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}\,\psi$$
$$\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A} = \text{rot}\,\vec{A}' \tag{3.20}$$

$\vec{A}$ ist also nur bis auf den Gradienten eines skalaren Potentials festgelegt. Um Eindeutigkeit zu erzielen, kann an $\vec{A}$ eine zusätzliche Bedingung gestellt werden.

Eine Möglichkeit ist $\psi = 0$ und damit $\text{div}\,\vec{A} = 0$. Das ist die sogenannte **Coulomb-Eichung**.

Wegen:

$$\text{rot}\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

erhält man

$$\text{rot}\left(\text{rot}\,\vec{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\text{rot}\left(\text{rot}\,\vec{A}\right) = \underbrace{\text{grad}\left(\text{div}\,\vec{A}\right)}_{0} - \Delta\vec{A}$$

$$-\Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{3.21}$$

Das ist die Bestimmungsgleichung für $\vec{A}$ (analog zu $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ in der Elektrostatik).

Weiter vorn hatten wir (3.15):

$$\vec{B} = \text{rot}\left\{\frac{1}{c}\int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right\}$$

Mit Definition $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$ folgt demnach für das Vektorpotenzial

$$\vec{A} = \frac{1}{c}\int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}. \tag{3.22}$$

Man kann zeigen, dass $\text{div}\,\vec{A} = 0$ erfüllt ist.

3.2.3 Magnetischer Fluss

Die homogene Feldgleichung der Magnetostatik lautet: $\text{div}\,\vec{B}(\vec{r}) = 0$.

Wir suchen nun die integrale Formulierung dieser Feldgleichung. Dazu nutzen wir die Definition des magnetischen Flusses Φ_m durch eine Fläche *f*:

$$\Phi_\text{m} = \int_f \vec{B}\cdot d\vec{f} \tag{3.23}$$

Wegen $B = \Phi_\text{m}/f$ heißt $\vec{B}$ ja auch magnetische Flussdichte.

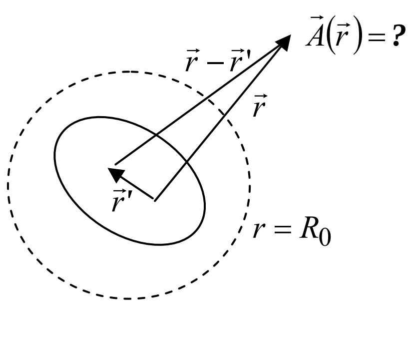
Aus der Feldgleichung $\text{div}\,\vec{B}(\vec{r}) = 0$ folgt, dass der magnetische Fluss durch eine geschlossene Fläche *f* verschwindet:

$$\oint_f \vec{B}\cdot d\vec{f} = \int_V \text{div}\,\vec{B}\,dV = 0. \tag{3.24}$$

V ist das von *f* eingeschlossene Volumen.
Anschaulich: Es gehen ebensoviel Feldlinien in *V* hinein, wie wieder hinausgehen.
→ Da das für beliebige Volumina gilt, müssen die Feldlinien geschlossen sein.
→ Es gibt keine magnetischen Ladungen, die Ursprung von Feldlinien sind.

3.3 Magnetischer Dipol

Wir betrachten eine lokalisierte Stromverteilung:



$$\vec{j}(\vec{r}\,') = \begin{cases} \text{beliebig}, & r' < R_0 \\ 0, & r' > R_0 \end{cases}$$

Gesucht: Feld außerhalb der Verteilung

Im Bereich $r > R_0$ kann das Vektorpotential $\vec{A}$ nach Potenzen von R_0/r entwickelt werden.

(vgl. Multipolentwicklung des elektrischen Potentials früher)

Hier: Beschränkung auf den niedrigsten Term: magnetischer Dipol

Entwicklung von:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \overset{r'<r}{=} \frac{1}{r} - \sum_{i=1}^{3} x_i' \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r} + \ldots = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3} + \ldots$$

Einsetzen in den Ausdruck (3.22) für das Vektorpotential:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{c\cdot r}\int_{V'} \vec{j}(\vec{r}')dV' + \frac{1}{c\cdot r^3}\int_{V'} (\vec{r}\cdot\vec{r}')\cdot\vec{j}(\vec{r}')dV' + \ldots$$

In einer begrenzten Stromverteilung gibt es in jeder Richtung gleich viele positive und negative Beiträge. Daher gilt:

$\int_{V'} \vec{j}(\vec{r}')dV' = 0$ also: der erste Term entfällt, es gibt keinen magnetischen Monopol!

Behandlung des zweiten Terms:

Wegen $\operatorname{div}\vec{j} = 0$ folgt $\sum_n \partial_n (x_i j_n) = j_i$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{3} \partial_n (x_i j_n) &= \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_n}(x_i \cdot j_n) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}(x_i \cdot j_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_i \cdot j_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(x_i \cdot j_3) \\
&= \frac{\partial x_i}{\partial x_1} j_1 + x_i \frac{\partial j_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_i}{\partial x_2} j_2 + x_i \frac{\partial j_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_i}{\partial x_3} j_3 + x_i \frac{\partial j_3}{\partial x_3} \\
&= \frac{\partial x_i}{\partial x_1} j_1 + \frac{\partial x_i}{\partial x_2} j_2 + \frac{\partial x_i}{\partial x_3} j_3 + x_i \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial j_1}{\partial x_1} + \frac{\partial j_2}{\partial x_2} + \frac{\partial j_3}{\partial x_3}\right)}_{= \operatorname{div}\vec{j} = 0}
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x_i}{\partial x_i}&=1\\ \frac{\partial x_i}{\partial x_j}&=0\end{aligned}\right\} j_i \text{ bleibt}$$

Daher gilt: $\int\limits_V x_k \cdot j_i(\vec r)dV = \sum\limits_{n=1}^{3}\int\limits_V x_k \partial_n\left(x_i \cdot j_n(\vec r)\right)dV \overset{\text{p.I.}}{=} -\int\limits_{V'} x_i \cdot j_k(\vec r)dV$

p.I.: $\int u' v = uv - \int uv' = 0 - \int uv'$

weil $j = 0$ für $V = \pm\infty$

Wir multiplizieren beide Seiten mit x_k', summieren über k, gehen zur Vektorschreibweise über und vertauschen $\vec r' \leftrightarrow \vec r$:

$$\int\limits_V x_k \cdot j_i(\vec r)dV = -\int\limits_V x_i \cdot j_k(\vec r)dV \qquad \Big|\cdot x_k'$$

$$\int\limits_V x_k \cdot j_i(\vec r)\cdot x_k' dV = -\int\limits_V x_i \cdot j_k(\vec r)\cdot x_k' dV \qquad \Big|\sum_k \text{, Vektorschreibweise}$$

$$\int\limits_V (\vec r \cdot \vec r')\cdot \vec j(\vec r)dV = -\int\limits_V \vec r \cdot \left(\vec j(\vec r)\cdot \vec r'\right)dV \qquad \Big|\vec r' \leftrightarrow \vec r$$

$$\int\limits_{V'} (\vec r \cdot \vec r')\cdot \vec j(\vec r')dV' = -\int\limits_{V'} \vec r' \cdot \left(\vec j(\vec r')\cdot \vec r\right)dV'$$

Noch ein Trick: $A = -B \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{2}(A + A) = \frac{1}{2}(A - B)$

Damit formen wir den zweiten Term der Dipolentwicklung um:

$$\begin{aligned}\int\limits_{V'} (\vec r \cdot \vec r')\cdot \vec j(\vec r')dV' &= \frac{1}{2}\int\limits_{V'}\left((\vec r \cdot \vec r')\cdot \vec j(\vec r') - \vec r' \cdot \left(\vec j(\vec r')\cdot \vec r\right)\right)dV'\\ &= -\frac{1}{2}\int\limits_{V'} \vec r \times \left(\vec r' \times \vec j(\vec r')\right)dV' \qquad \text{allg. gilt: } \vec a \times \left(\vec b \times \vec c\right) = \vec b\left(\vec a \cdot \vec c\right) - \vec c\left(\vec a \cdot \vec b\right)\\ &= -\frac{\vec r}{2}\times \int\limits_{V'}\left(\vec r' \times \vec j(\vec r')\right)dV'\end{aligned}$$

Die Größe

$$\vec \mu = \frac{1}{2c}\int\limits_V \left(\vec r \times \vec j(\vec r)\right)dV \tag{3.25}$$

bezeichnen wir als magnetisches Dipolmoment der Stromverteilung.

Einsetzen ins Vektorpotential (Entwicklung):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3} + \ldots \qquad \text{für } r > R_0 \tag{3.26}$$

Das dazugehörige Magnetfeld hat die gleiche Struktur wie das elektrische Dipolfeld:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{3\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\mu}) - \vec{\mu} \cdot r^2}{r^5} \tag{3.27}$$

Beispiele für Systeme mit magnetischem Dipolmoment:

Erde
stromdurchflossene Drahtschleife oder Spule
Kompassnadel
Elementarteilchen

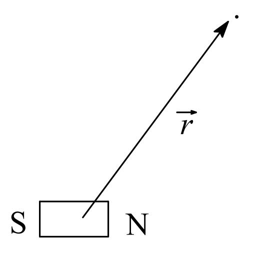
Folgerungen: Drehmoment

Beobachtungen:

1. Magnetische Dipole erzeugen ein magnetisches Feld $\vec{B}$ analog zum elektrischen Feld $\vec{E}$, das von elektrischen Dipolen hervorgerufen wird.

$$\vec{E} = \frac{3\vec{e}_r(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) - \vec{p}}{r^3} \quad : \text{Elektrostatik}$$

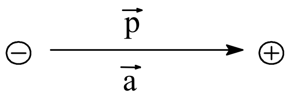
$$\vec{B} = \frac{3\vec{e}_r(\vec{\mu} \cdot \vec{e}_r) - \vec{\mu}}{r^3}$$



$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

2. Äußere magnetische Felder üben auf einen magnetischen Dipol ein Drehmoment $\vec{D}$ aus.

Elektrischer Dipol: $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}$ $\qquad$ $\vec{F}$: Kraft



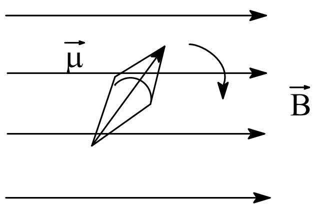
$\vec{p} = q\vec{a}$

$$\begin{aligned}\vec{D} = \vec{D}_- + \vec{D}_+ &= \left(\vec{r}_- \times \vec{F}_-\right) + \left(\vec{r}_+ \times \vec{F}_+\right) \\ &= -\left(\vec{r}_- \times \left(q\vec{E}\right)\right) + \left(\vec{r}_+ \times \left(q\vec{E}\right)\right) \\ &= \left(\vec{r}_+ - \vec{r}_-\right) \times q\vec{E} = \left(q\vec{a}\right) \times \vec{E}\end{aligned}$$

$\vec{D} = \vec{p} \times \vec{E}$ Drehmoment

Analog gilt in der Magnetostatik:

$\vec{D} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ für magnetische Dipole. (3.28)

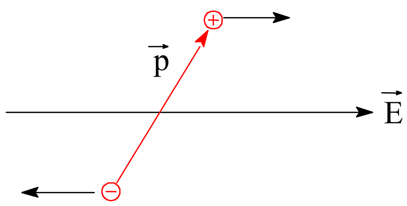


$\vec{D} = 0$ für $\vec{\mu} \| \vec{B}$

Die Dipole werden in Feldrichtung gedreht.

Das magnetische Moment einer Leiterschleife

Elektrischer Dipol

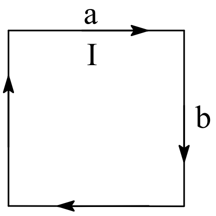


In einem homogenen Feld $\vec{E}$ wird $\vec{p}$ in Feldrichtung gedreht.

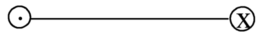
Drehmoment: $\vec{D} = \vec{p} \times \vec{E}$ (hatten wir hergeleitet).

Definition: $\vec{D} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ für ein magnetisches Dipolmoment.

Leiterschleife:



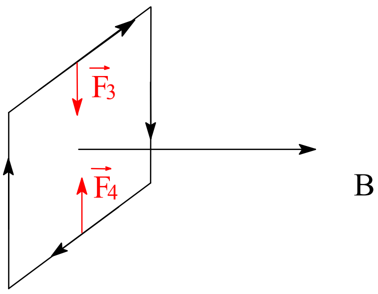
von oben



I zu uns , I von uns weg

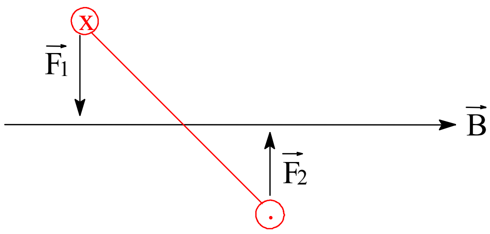
Wir betrachten verschiedene Platzierungen der Leiterschleife in einem homogenen Feld $\vec{B}$.

$$d\vec{F} = \frac{1}{c}\left(I\, d\vec{l} \times \vec{B}\right) \qquad \text{1. Ampèresches Gesetz} \qquad (3.29)$$

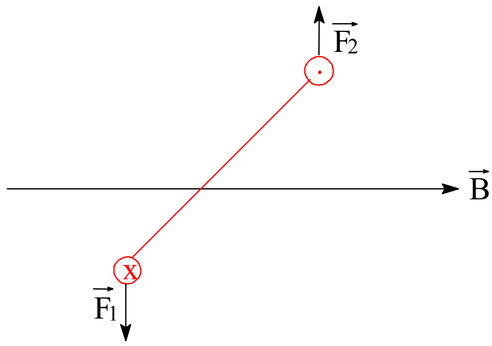


Die Kräfte $\vec{F}_3$ und $\vec{F}_4$ versuchen, den Leiter zusammenzudrücken. Aus ihnen resultiert keine Drehbewegung.

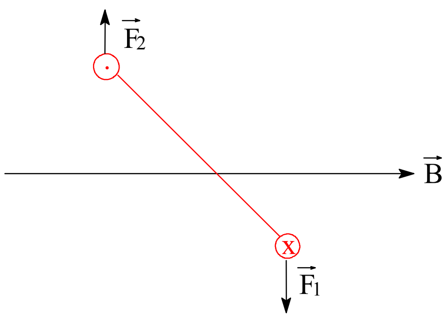
1.



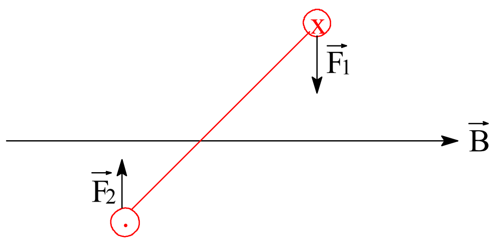
2.



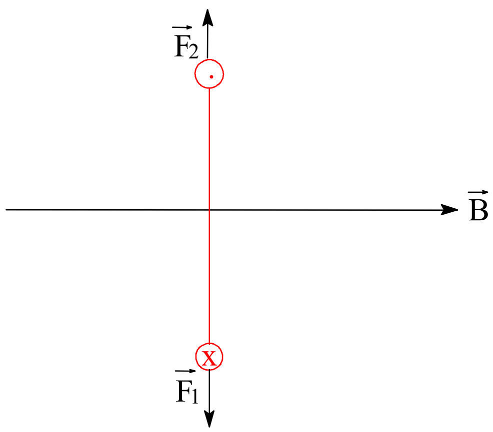
3.

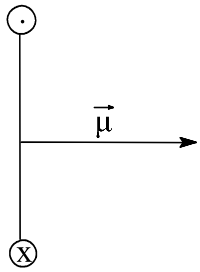


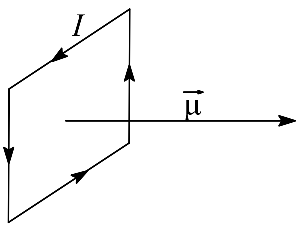
4.



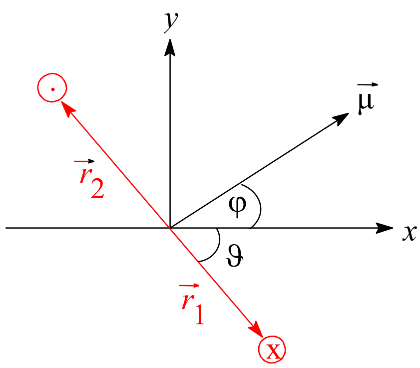
5. Offenbar ist die Gleichgewichtslage







Berechnung des Drehmomentes:



$$\vartheta + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{D} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad ; \quad \vec{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D_z \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{D}\right| = D_z = -\mu B_x \sin\varphi$$

(z-Achse zeigt zu uns.)

$$\vec{D} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$\vec{r}_1 = -\vec{r}_2 \quad ; \quad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

$$D = 2\left(\vec{r}_1 \times \vec{F}_1\right)$$

Erinnerung: Vektorprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$: $\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$

$$d\vec{F} = \frac{I}{c}\left(d\vec{l} \times \vec{B}\right)$$

$$\vec{F} = -\frac{I}{c}\left(b\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = -\frac{b \cdot I}{c}\begin{pmatrix} 0 \\ B_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{D} = 2\left(\vec{r}_1 \times \vec{F}_1\right) = -\frac{2bI}{c}\left[\begin{pmatrix} \frac{a}{2}\cos\vartheta \\ -\frac{a}{2}\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ B_x \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D_z \end{pmatrix} \quad ; \quad D_z = -\frac{2bI}{c}\frac{a}{2}\cos\vartheta \cdot B_x$$

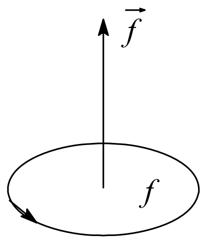
$$D_z = -I\frac{a \cdot b}{c}B_x \cos\vartheta \quad ; \quad \vartheta + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$D_z = -I\frac{a \cdot b}{c}B_x \sin\varphi$$

Aus Vergleich folgt: $\mu = \left|\vec{\mu}\right| = \frac{I \cdot a \cdot b}{c} = \frac{I \cdot f}{c}$ (3.30)

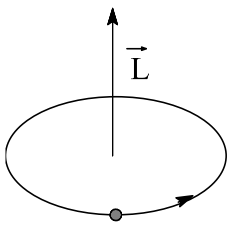
f: Die von der Leiterschleife umschlossene Fläche.
Gerichtete Fläche: $\vec{f}$
(Schraubensinn)

$$\vec{\mu} = \frac{I \cdot \vec{f}}{c} \qquad (3.31)$$



Diese Formel gilt allgemein für eine beliebig geformte Leiterschleife (falls diese in einer Ebene liegt).

Beispiel:



Magnetisches Moment einer einzelnen Ladung, die sich auf einer Kreisbahn bewegt. ($|\vec{v}| = \text{konst.}$, z. B. Elektron)

Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

1. $\vec{L} \parallel \vec{f}$
2. In der Mechanik hatten wir abgeleitet $\frac{df}{dt} = \frac{1}{2\mu} L \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dt} = \text{konst.}$

$f = \frac{1}{2m_\mathrm{e}} L \cdot T$, Umlaufzeit T; $\vec{f} = \frac{1}{2m_\mathrm{e}} \vec{L} \cdot T$; m_e: Masse des umlaufenden Teilchens.

$\vec{\mu} = \frac{I \cdot \vec{f}}{c} = \frac{I}{c} \frac{1}{2m_\mathrm{e}} \vec{L} \cdot T$ mit $I = \frac{q}{T}$

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m_\mathrm{e} c} \vec{L} \tag{3.32}$$

Diese Beziehung ist von grundlegender Bedeutung in der Quantenmechanik. Dort gilt:

$|\vec{L}| = n\hbar \quad ; \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$

$|\vec{\mu}| = \frac{q}{2mc} n\hbar \quad ; \quad \mu_B = \frac{q}{2mc} \hbar$ Bohrsches Magneton