Wolfram Liebermeister 28.10.2013

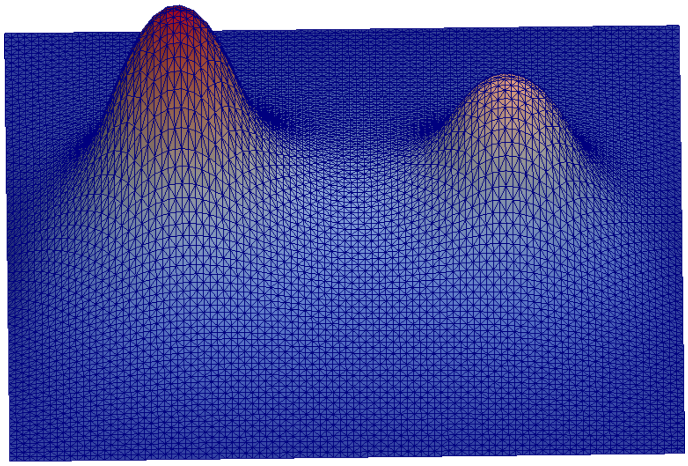
Einführung: Integrale

HU-Berlin - Institut für Theoretische Biophysik

Anlehnung an die Vorlesung Höhere Mathematik 3
von Michael Eisermann,
`www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm`

Tutoren: Wolfgang Giese, Björn Goldenbogen
(wolfgang.giese@biologie.hu-berlin.de, bjoern.goldenbogen.1@biologie.hu-berlin.de)

1 Integralsätze - Motivation



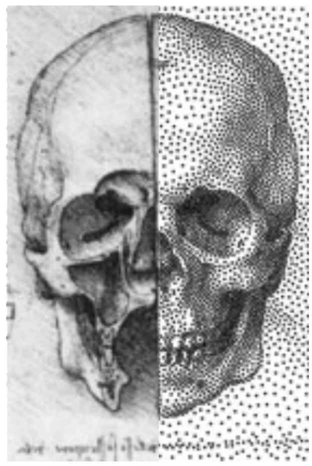
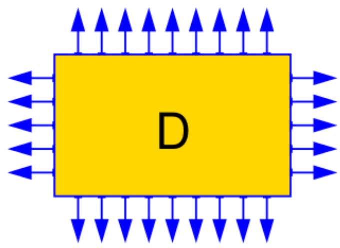


Bild zum "Electrostatic Halftoning“ aus [1].

1.1 Ziel

Der Prototyp für die nachfolgenden Integralsätze ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI): Für jede stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$:

$$\int_a^b f'(x)dx = (+1) \cdot f(b) + (-1) \cdot f(a) = f(b) - f(a).$$



Der HDI kann als Spezialfall der höherdimensionalen Verallgemeinerung vom Staz von Gauß aufgefasst werden. Für $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\int\limits_D div\left(\vec{f}\right) d\mathbf{x} = \int\limits_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n}_{\partial D} |dS|.$$

Dabei ist D ein Gebiet (engl. "Domain"). Im Folgenden ist das Gebiet meistens eine Fläche oder ein Volumen und wir erhalten die bekannten Sätze von Stokes und Gauß.
Satz von Gauß :

$$\int\limits_V div(\vec{f}) dV = \int\limits_{\partial V} \vec{f} \cdot d\vec{n}.$$

Satz von Stokes :

$$\int\limits_A rot(\vec{f}) \cdot d\vec{A} = \int\limits_{\partial A} \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

Ziel dieser Einführung ist der Umgang mit Weg- und Flächen- Integralen die in der Elektrodynamik auftreten.

2 Wegintegrale

2.1 Wege und Kurven

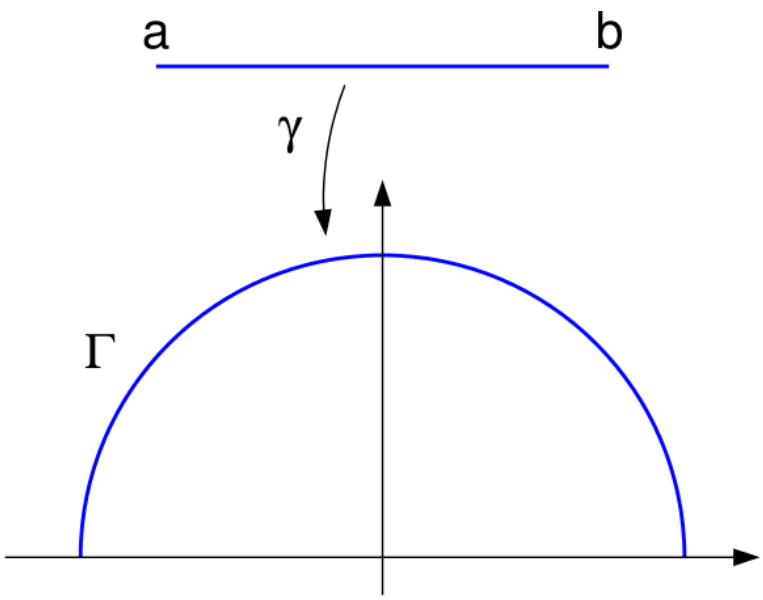
Ein Weg ist eine stetige Abbildung:

$$\vec{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \vec{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \qquad \text{(2D) bzw.}$$
$$\vec{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3, \vec{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \qquad \text{(3D)}$$

Sein Bild, oder auch Spur, ist die Bildmenge:

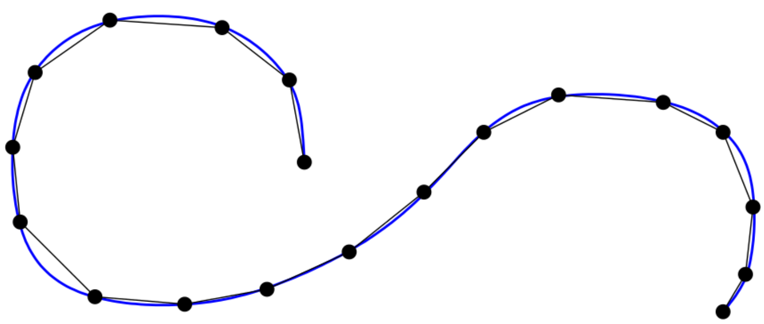
$$\Gamma = \vec{\gamma}([a, b]) = \{\vec{\gamma}(t) | a \leq t \leq b\}.$$

Jedem Zeitpunkt $t \in [a, b]$ wird ein Bildpunkt $\vec{\gamma}(t) \in \Gamma$ zugeordnet. Man sagt auch: $\vec{\gamma}$ ist eine Parametrisierung der Kurve Γ.
Beispiel: $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ wird parametrisiert durch:



$$
\begin{aligned}
\text{Eine Möglichkeit } \vec{\gamma} : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad & \vec{\gamma}(t) = (cos(t), sin(t)),\\
\text{Eine andere Möglichkeit } \hat{\vec{\gamma}} : [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad & \hat{\vec{\gamma}}(t) = (t, \sqrt{1-t^2}),\\
\text{Noch eine andere Möglichkeit } \bar{\vec{\gamma}} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad & \bar{\vec{\gamma}}(t) = (cos(t), |sin(t)|),
\end{aligned}
$$

2.2 Länge einer Kurve



Sei $\vec{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ injektiver (der Weg besucht jeden Punkt der Kurve nur genau einmal) und stückweise stetiger Weg. Dieser kann durch kleine gerade Streckensegmente wie in der Abbildung approximiert werden. Ist also $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b\}$ eine Partitionierung des Intervalls $[a,b]$, so können wir die Länge des Weges durch:

$$
\begin{aligned}
\ell(\vec{\gamma}, P) &:= \sum_{k=1}^{N} \sqrt{(\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1}))^2 + (\gamma_2(t_k) - \gamma_2(t_{k-1}))^2 + (\gamma_3(t_k) - \gamma_3(t_{k-1}))^2}\\
&= \sum_{k=1}^{N} |\vec{\gamma}(t_k) - \vec{\gamma}(t_{k-1})|.
\end{aligned}
$$

nährungsweise berechnen. $|.|$ ist hier die euklidische Norm bzw. Abstand. Beim

Übergang zu infinitisimal kleinen Streckenabschnitt gilt:

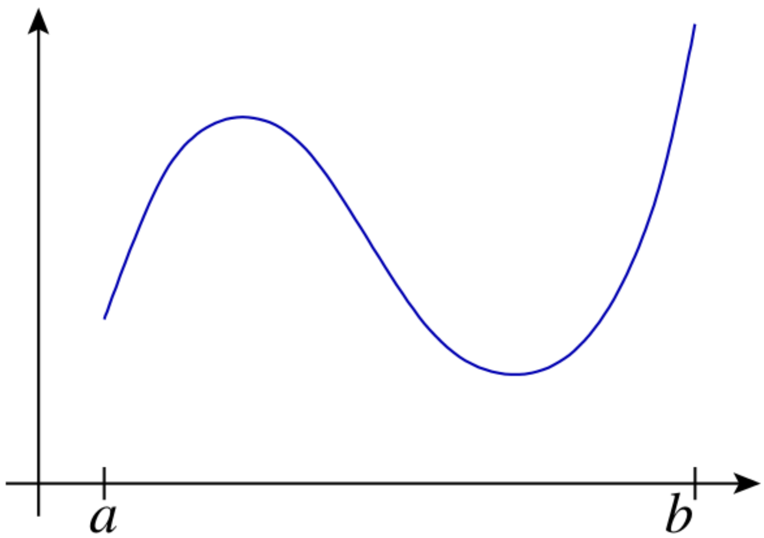
$$\ell(\vec{\gamma}, P) = \sum_{k=1}^{N} |\vec{\gamma}(t_k) - \vec{\gamma}(t_{k-1})| \overset{HDI}{=} \sum_{k=1}^{N} |\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \vec{\gamma}'(t)dt|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |\vec{\gamma}'(t)|dt = \int\limits_{a}^{b} |\vec{\gamma}'(t)|dt.$$

Damit gilt für die Länge einer Kurve:

$$\ell(\vec{\gamma}) = \int\limits_{a}^{b} |\vec{\gamma}'(t)|dt.$$

Beispiel: Länge eines Funktionsgraphen



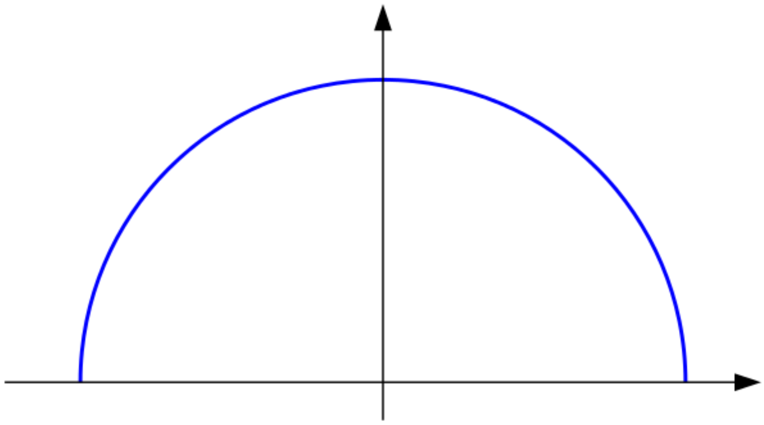
Jede stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert einen Weg durch:

$$\vec{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } \vec{\gamma}(t) = (t, f(t)).$$

Es gilt $\vec{\gamma}'(t) = (1, f'(t))$ und $|\vec{\gamma}'(t)| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$, also

$$\ell(\vec{\gamma}) = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + f'(t)^2}dt.$$

Beispiel: Länge eines Halbkreises



$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = r^2, y \geq 0\}$$

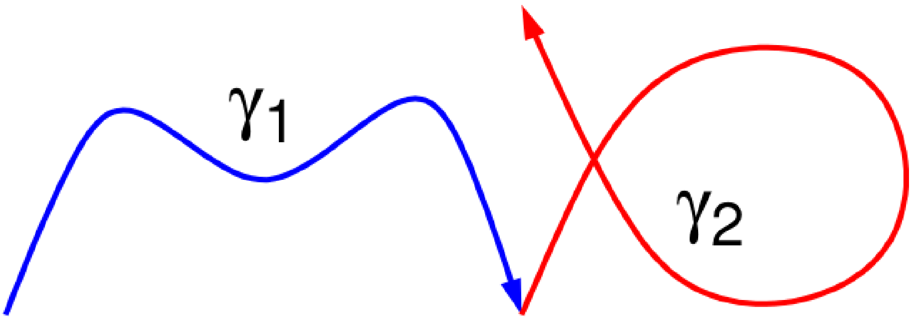
wird parametrisiert durch:

$$\vec{\gamma} : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \vec{\gamma}(t) = (rcos(t), rsin(t)).$$

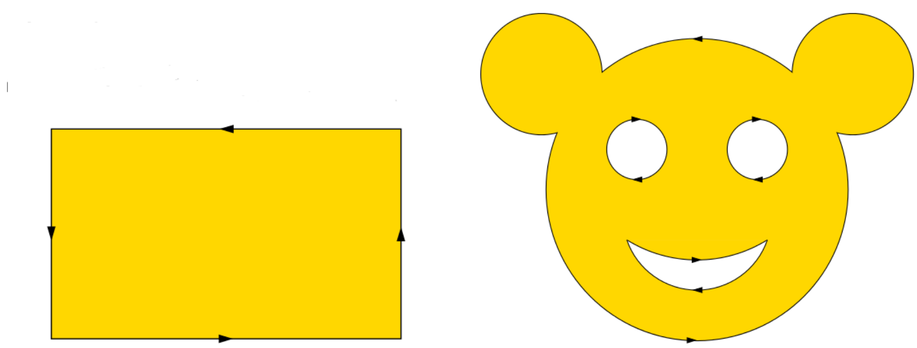
Es gilt $\vec{\gamma}'(t) = (-rsint, rcost)$, also $|\vec{\gamma}'(t)| = r$ und damit

$$\ell(\vec{\gamma}) = \int_0^\pi |\vec{\gamma}'(t)| dt = \pi r.$$

Dies Formel gilt natürlich nur für glatte Kurven. Nichtreguläre Kurven können oft in reguläre Kurven zerlegt werden. Diese können dann einzeln hintereinander integriert und anschließend verknüpft werden.

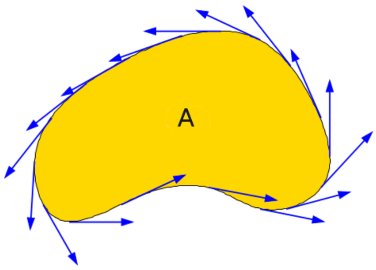


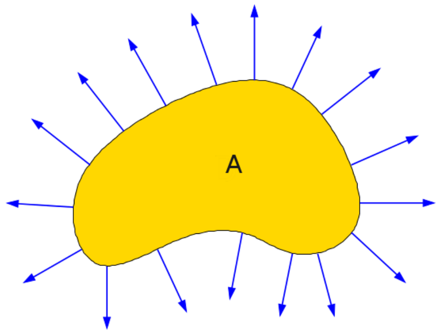
So kann man dann auch über eckige Kurven oder ungewöhnliche Ränder integrieren.



Ränder sind per mathematischer Konvention immer so orientiert, dass das Gebiet links des Randes liegt.

2.2.1 Tangententen- und Normaleneinheitsvektor





Sei A eine Fläche und $\vec{\gamma} : [0,1] \to \partial A$ eine reguläre Parametrisierung des Randes. Wir wählen die Orientierung so, dass A links von $\vec{\gamma}$ liegt. Im Punkt $\vec{x} = \vec{\gamma}(t)$ mit $0 < t < 1$ definieren wir den Einheitstangentenvektor:

$$\vec{t}_{\partial A}(\vec{x}) := \frac{\vec{\gamma}'(t)}{|\vec{\gamma}'(t)|},$$

Wegen

$$|\vec{t}_{\partial A}(\vec{x})| = \frac{|\vec{\gamma}'(t)|}{|\vec{\gamma}'(t)|} = 1$$

hat er die Länge 1. Zu einem Vektor $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ist der um 90° (im Uhrzeigersinn) gedrehte Vektor:

$$\circlearrowright (v_1, v_2) := (v_2, -v_1).$$

Aus dem Tangenteneinheitsvektor gewinnen wir so den Normaleneinheitsvektor:

$$\vec{n}_{\partial A}(x) := \circlearrowright \vec{t}_{\partial A}(x).$$

Anmerkung: Dies geht natürlich nur dort, wo der Rand keine "Ecken" hat. An den Stücken, wo der Rand zusammengesetzt ist und "Ecken" auftauchen, kann man keinen Normalenvektor definieren.
Außerdem: Da per mathematischer Konvention das Gebiet immer links des Randes liegt, zeigt der Normalenvekor aus dem Gebiet heraus!

2.3 Wegintegrale erster Art

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{\gamma} : [a,b] \to \partial A$ stückweise stetig differenzierbar. Ein Skalarfeld ist eine stetige Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$. Das Wegintegral von f über $\vec{\gamma}$ ist:

$$\int_{\partial A} f ds := \int_a^b f(\vec{\gamma}(t))|\vec{\gamma}'(t)|dt.$$

Das heißt also ein Wegintegral erster Art summiert die Werte eines Skalarfeldes entlang eines Weges auf. Für $f \equiv 1$ erhalten wir wieder die Länge des Randes bzw. der Kurve. Andere Schreibweisen für das Wegintegral erster Art:

$$\int_{\partial A} f ds = \int_{\gamma} f|d\vec{\gamma}| = \int_{\gamma} f|d\vec{s}|.$$

2.4 Wegintegrale zweiter Art

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{\gamma} : [a, b] \to \Gamma \subset D$ stückweise stetig differenzierbar. Ein Vektorfeld ist eine stetige Abbildung $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^n$. Das Wegintegral zweiter Art von f über $\vec{\gamma}$ ist:

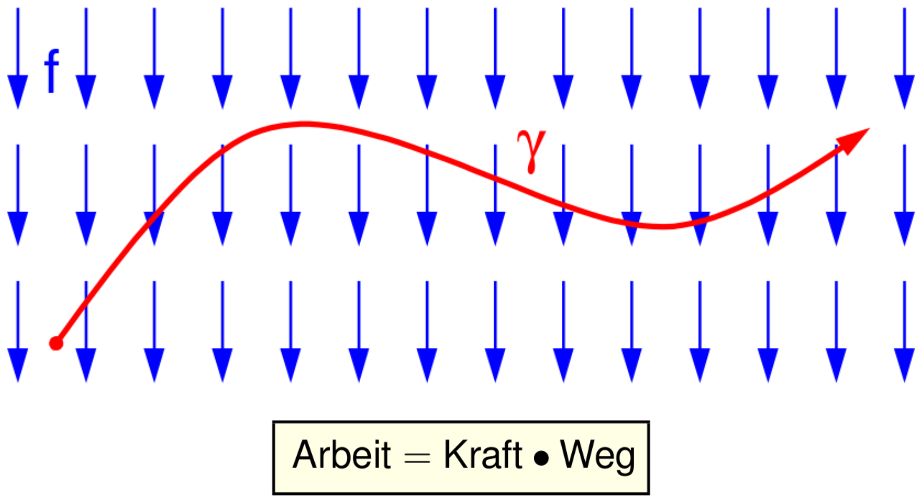
$$\int\limits_{\partial A} \vec{f} \cdot d\vec{s} := \int\limits_a^b \vec{f}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt.$$

Das heißt also ein Wegintegral zweiter Art summiert die Anteile des Vektorfeldes auf, die tangential zum Weg liegen. Andere Schreibweisen für das Wegintegral zweiter Art:

$$\int\limits_{\partial A} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int\limits_{\partial A} \left\langle \vec{f} | d\vec{s} \right\rangle = \int\limits_{\gamma} \left\langle \vec{f} | d\vec{\gamma} \right\rangle.$$

Anmerkung: Das Wegintegral zweiter Art lässt sich auch über das Skalarprodukt zwischen den Anteilen eines Vektorfeldes, die im rechten Winkel zum Weg orientiert sind, definieren. Dies wird aber in unserem Fall nicht benötigt.

Ein Wegintegral zweiter Art ist zum Beispiel das Arbeitsintegral. Dort wird die Kraft entlang eines Weges innerhalb eines Kraftfeldes integriert. Das entspricht der geleisteten Arbeit.



Anmerkung: Zu beachten ist, dass sich das Vorzeichen umdreht, wenn das Wegintegral in umgehrter Richung durchlaufen wird. Daraus folgt, dass für eine geschlossene Kurve in einem konstanten Kraftfeld die Arbeit immer null ist.

3 Flächenintegrale

Analog können wir auch Integrale über Flächen definieren.

3.1 Flächenintegrale erster Art

$$\int_A f|d\vec{A}| \text{ bzw. alternative Schreibweise: } \int_A f dA$$

für ein Skalarfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

3.2 Flächenintegrale zweiter Art

Flächenintegral zweiter Art:

$$\int_A \vec{f} \cdot d\vec{A} \text{ bzw. alternative Schreibweise: } \int_A \vec{f} \cdot \vec{n} dA$$

für ein Vektorfeld $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

4 Der Satz von Stokes und die Rotation

4.1 Die Rotation eines Vektorfeldes

Zur Erinnerung:

$$\partial_i f_j = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

Die Rotation eines Vektorfeldes $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist wie folgt definiert:

$$rot(\vec{f}) = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix}.$$

Alternative Berechnungsmöglichkeiten:

$$rot(\vec{f}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}.$$

Nützlich für Berechnungen ist aber vor allem Berechnung über den Epsilon-Tensor:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{falls zwei Indizes gleich sind,} \\ 1, & \text{bei einer geraden Permutation von } 1, 2, 3, \ldots, \\ -1, & \text{bei einer ungeraden Permutation von } 1, 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

Das Tauschen zweier Indizes führt also zur Umkehr des Vorzeichens des Epsilon-Tensors! Für die Rotation folgt also:

$$rot(\vec{f}) = \begin{pmatrix} \epsilon_{1,2,3}\partial_2 f_3 + \epsilon_{1,3,2}\partial_3 f_2 \\ \epsilon_{2,3,1}\partial_3 f_1 + \epsilon_{2,1,3}\partial_1 f_3 \\ \epsilon_{3,1,2}\partial_1 f_2 + \epsilon_{3,2,1}\partial_2 f_1 \end{pmatrix} = \sum_{i,j,k=1,2,3} \epsilon_{i,j,k}\partial_j f_k \vec{e}_i.$$

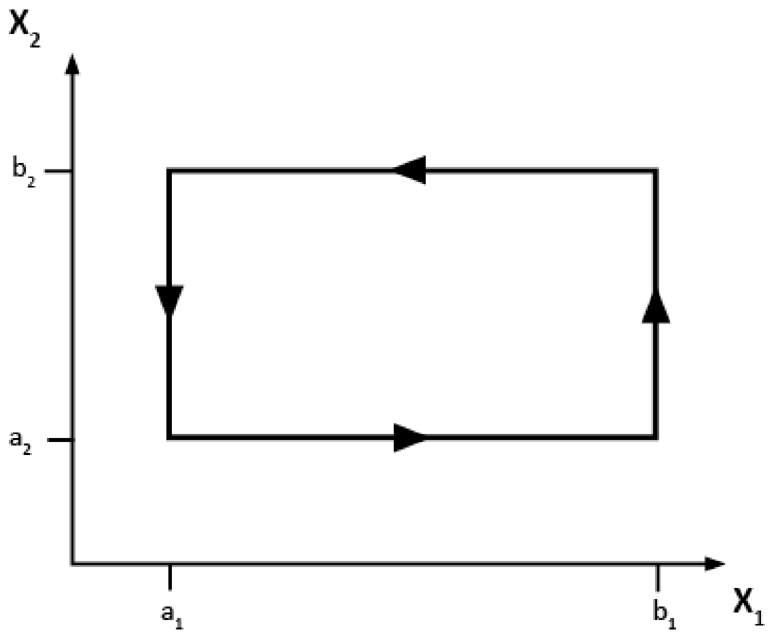
4.2 Der Satz von Stokes

Satz von Stokes : Für eine Fläche $A \in \mathbb{R}^3$ mit stückweisegalltem Rand ist das Integral der Rotation eine Vektorfeldes über diese Fläche gleich dem Wegintegral zweiter Art über dessen Rand. In Formelschreibweise

$$\int\limits_A rot(\vec{f}) \cdot d\vec{A} = \int\limits_{\partial A} \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

Das linke Integral beim Satz von Stokes ist ein Flächenintegral und das rechte ein Wegintegral zweiter Art.
Damit wird ein Flächenintegral in ein Wegintegral überführt bzw. umgekehrt!

Den Satz können wir für ein Rechteck mathematisch beweisen. O.B.d.A. (Ohne Beschrängung der Allgemeinheit) können wir annehmen, dass das Rechteck in der x_1-x_2-Ebene liegt.

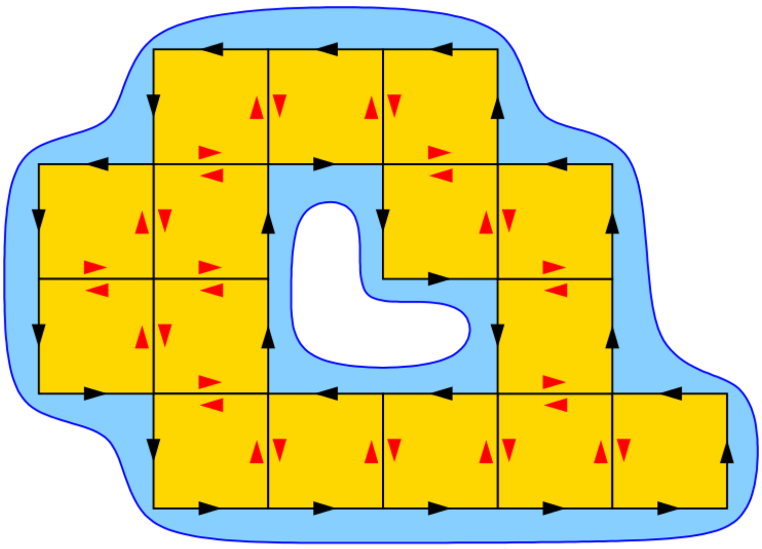


$$\int\limits_A rot(\vec{f}) \cdot d\vec{A} = \int\limits_A \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dA = \int\limits_A (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)\, dA$$

Mit dem Hauptsatz der Integral und Differentialrechnung und dem Satz von Fubini:

$$
\begin{aligned}
\int_A (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)\, dA &\overset{Fubini}{=} \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{x_2=a_2}^{b_2} (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)\, dx_2 dx_1 \\
&= \int_{x_2=a_2}^{b_2} \int_{x_1=a_1}^{b_1} \partial_1 f_2 dx_1 dx_2 - \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{x_2=a_2}^{b_2} \partial_2 f_1 dx_2 dx_1 \\
&\overset{HDI}{=} \int_{x_2=a_2}^{b_2} (f_2(b_1,x_2) - f_2(a_1,x_2))dx_2 - \int_{x_1=a_1}^{b_1} (f_1(x_1,b_2) - f_1(x_1,a_2))dx_1 \\
&= \underbrace{\int_{x_2=a_2}^{b_2} f_2(b_1,x_2)dx_2}_{\text{Int. über rechte Kante}} - \underbrace{\int_{x_2=a_2}^{b_2} f_2(a_1,x_2)dx_2}_{\text{Int. über linke Kante}} \\
&\quad - \underbrace{\int_{x_1=a_1}^{b_1} f_1(x_1,b_2)}_{\text{Int. über obere Kante}} + \underbrace{\int_{x_1=a_1}^{b_1} f_1(x_1,a_2)dx_1}_{\text{Int. über untere Kante}} \\
&= \int_{\partial A} \vec{f} \cdot d\vec{s},
\end{aligned}
$$

q.e.d.



References

[1] Christian Schmaltz, Pascal Gwosdek, Andrs Bruhn, and Joachim Weickert. Electrostatic halftoning. *Comput. Graph. Forum*, 29(8):2313–2327, 2010.