Elektrodynamik
Wintersemester 2015/16

HU-Berlin - Institut für Theoretische Biophysik

Übungsaufgaben zur Wiederholung

Aufgabe 1 *Zur Erinnerung*

Vergegenwärtigen Sie sich noch einmal die Maxwellgleichungen, die Integralsätze von Gauß und Stokes, die Beziehungen zwischen Feldern und Potentialen, die Kontinuitätsgleichung für Ladungen sowie die Coulomb- und Lorenzeichung.

Aufgabe 2 *Vektoranalysis I*

Zeigen Sie mit Hilfe des ε-Tensors, für beliebige Vektorfelder $\vec{A}$ und $\vec{B}$ und für skalare Felder ψ,

a) $div\ rot\ \vec{A} = 0$.

b) $rot\ grad\ \psi = 0$.

c) $rot\ (rot\ \vec{A}) = grad(div\vec{A}) - \Delta\vec{A}$.

d) $\mathrm{rot}(\psi\vec{A}) = (grad\,\psi) \times \vec{A} + \psi\,(rot\,\vec{A})$.

Aufgabe 3 *Vektoranalysis II*

Berechnen Sie für alle Punkte $\vec{r} \neq \vec{r}'$ die folgenden Ableitungen:

a) $\nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$.

b) $\Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$.

Aufgabe 4 *Gaußscher Integralsatz*

Wie lautet der Gaußsche Integralsatz? Beweisen Sie den Gaußschen Integralsatz im dreidimensionalen Raum für den Spezialfall, dass das Volumen ein Quader ist.

Aufgabe 5 *Gaußsches Gesetz*

Wie lautet das Gaußsche Gesetz? Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes das elektrische Feld

a) einer homogenen Vollkugel mit Radius R und konstanter Ladungsdichte ρ.

b) einer Hohlkugel mit Radius R und einer konstanten Oberflächenladungsdichte σ.

Die Gesamtladung der betrachteten Kugeln beträgt immer Q.
Tipp: Untersuchen Sie die Fälle innerhalb und außerhalb der Kugel getrennt.

Aufgabe 6 *Potential und Energie einer homogen geladenen Vollkugel*

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Poissongleichung das Potential der Vollkugel mit Radius R und konstanter Ladungsdichte ρ. Skizzieren Sie das Potential und vergleichen Sie den Verlauf mit dem des elektrischen Feldes aus Übung 1. Tipp: Verwenden Sie Kugelkoordinaten und die Beziehung:

$$\Delta f(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}.$$

(Die letzten beiden Terme verschwinden für radialsymmetrische Funktionen.)

b) Berechnen Sie die Gesamtenergie W der Kugel. (Hinweis: In Kugelkoordinaten gilt $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$.)

Aufgabe 7 *Kondensator*

a) Berechnen Sie die Kapazität eines Zylinderkondensators, bestehend aus zwei konzentrischen Zylindern der Länge L und der Radien R_1 und R_2, die jeweils mit der Ladung Q belegt sind. Dabei soll gelten, dass $L \gg R_1, R_2$ ist.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Satzes die Kapazität eines Plattenkondensators, bestehend aus zwei parallelen Platten der Fläche A im Abstand d, die jeweils mit der Ladung Q belegt sind. Vernachlässigen Sie Randeffekte, d.h. ignorieren Sie Felder außerhalb des Kondensatorvolumens.

c) Wieviel Energie speichern die beiden Kondensatoren?

Aufgabe 8 *Dielektrikum*

Ein Plattenkondensator (Plattenfläche F, Plattenabstand d) sei ganz mit einem inhomogenen Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon_r(z)$ gefüllt. Wie lautet die Kapazität? Berechnen Sie daraus die Kapazität für den Spezialfall, dass das Dielektrikum aus zwei Schichten mit Dicken d_1 und d_2 mit den Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon_r^{(1)}$ und $\varepsilon_r^{(2)}$ besteht.

Aufgabe 9 *Elektrisches Feld*

Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Satzes das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ und das Potential $\varphi(\vec{r})$ einer homogen geladenen und unendlich ausgedehnten ebenen Platte der Dicke d.

Aufgabe 10 *Ableitungen elektrischer Felder*

Überprüfen Sie, ob die folgenden zwei Vektorfelder elektrostatische Felder sein können und berechnen Sie die elektrische Ladungsdichte.

a) $A(\vec{r}) = r\vec{e_x}$,

b) $B(\vec{r}) = \psi(r)\vec{r}$,

wobei $r = |\vec{r}|$.

Aufgabe 11 *Dipolfeld*

Skizzieren Sie graphisch das elektrische Feld (Feldlinien) und das Potential (Äquipotentialflächen) eines elektrischen Dipols.

Aufgabe 12 *Vektorpotential*

Konstruieren Sie ein Vektorpotential $\vec{A}$ derart, so dass das resultierende magnetische Feld $\vec{B}$ konstant ist und darüber hinaus nur Beiträge in x-Richtung aufweist.

Aufgabe 13 *Kontinuitätsgleichung*

Leiten Sie aus den Maxwell'schen Gleichungen die Kontinuitätsgleichung $div\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$ her.

Aufgabe 14 *Magnetischer Dipol*

Das Vektorpotential eines magnetischen Dipols mit einem Moment $\vec{\mu}$ lässt sich schreiben als:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3}. \tag{1}$$

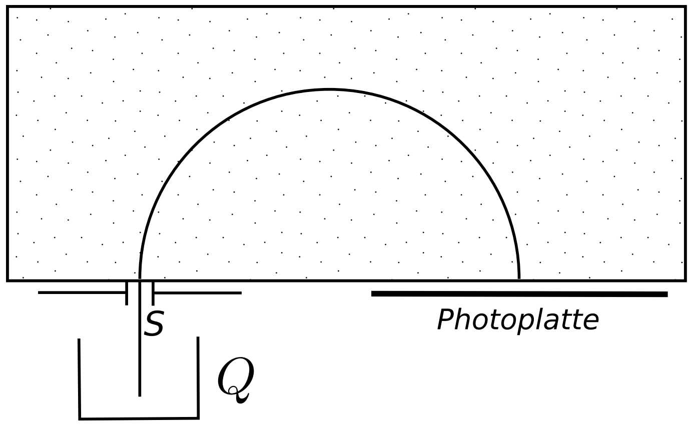
Erfüllt dieses Potential die Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \vec{A} = 0$? Hinweis zur Lösung: Verwenden Sie den ε-Tensor und beachten Sie, dass $\frac{\vec{r}}{r^3}$ sich als ein Gradientenfeld schreiben lässt.

Aufgabe 15 *2. Ampèresches Gesetz*

(a) Leiten Sie mit Hilfe des Stokeschen Satzes und der Beziehung $rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$ das 2. Ampèresche Gesetz in Integralform her.

(b) Gegeben sei ein unendlich langer Hohlzylinder mit dem Innenradius R_1 und dem Außenradius R_2, durch den ein Gesamtstrom I mit einer homogenen Stromdichte fließt. In welche Richtung zeigt die hervorgerufene magnetische Induktion $\vec{B}$? Stellen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}$ bildlich dar und geben sie das Feld in Abhängigkeit vom Abstand zur Rotationsachse des Zylinders an. Betrachten Sie sowohl den Innenraum als auch den Außenraum.

(c) Bestimmen Sie das Feld $\vec{B}$ wie in Aufgabenteil (b), aber für einen gleichmäßig durchflossenen Vollzylinder.



Aufgabe 16 *Teilchen im Magnetfeld*

Teilchen der Masse M werden in einer Ionenquelle Q einfach ionisiert und durch die Spannung U beschleunigt. Sie treten durch einen Schlitz S in das Magnetfeld B senkrecht zur Zeichenebene ein (siehe Abbildung). Wo treffen sie auf die Photoplatte? Wie kann mit dieser Anordnung die Masse der Teilchen festgestellt werden?

Aufgabe 17 *Elektromagnetische Welle*

a) Leiten Sie aus den Maxwell-Gleichungen für das Vakuum (in Abwesenheit von Ladungen und Strömen ($\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$)) ab, dass für das magnetische Feld $\vec{B}$ die Wellengleichung

$$\left(\Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right)\vec{B} = 0 \qquad (2)$$

gilt. (Sie benötigen die Identität $\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla\vec{a}) - \Delta\vec{a}$). Wie hängt die Ausbreitungsgeschwindigkeit v mit der Lichtgeschwindigkeit c zusammen?

b) Welcher Zusammenhang zwischen v, $k = |\vec{k}|$ und ω muss bestehen, damit das magnetische Feld $\vec{B} = \vec{B}_0 \cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}$ die Wellengleichung erfüllt?