2 Elektrostatik

2.1 Grundlegende Begriffe

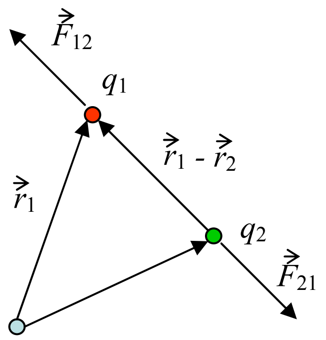
Experimentelle Ergebnisse:

a) Geladene Körper üben eine Kraft aufeinander aus.

b) Es gibt zwei Arten von Ladungen, negative und positive. Verschiedene Ladungen ziehen sich an, gleichartige stoßen sich ab.

c) Die Kraft F_{12} zwischen zwei Ladungen a_1 und a_2 ist proportional zu ihrem Produkt

$$\left|\vec{F}_{12}\right| = F_{12} \propto q_1 q_2$$



und sie nimmt mit dem Quadrat des Abstandes ab

$$\left|\vec{F}_{12}\right| \propto \frac{1}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^2}\,.$$

d) Die elektrostatischen Kräfte sind Zentralkräfte

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \frac{kq_1q_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^2}\frac{\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|} = \frac{kq_1q_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^2}\vec{e}_{12}} \tag{2.1}$$

Coulombsches Gesetz (Coulomb, 1736–1806).

e) Die elektrostatischen Kräfte sind 2-Körper-Kräfte. Es gilt das Superpositionsprinzip: Die elektrostatischen Kräfte, die auf eine Probeladung q von mehreren anderen Ladungen q_1, q_2, … ausgeübt werden, überlagern sich ungestört.

$$\vec{F} = kq\sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\left(\vec{r} - \vec{r}_i\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^3} \tag{2.2}$$

Das Coulombsches Gesetz gilt in dieser Form nur exakt für Punktladungen und für kugelförmige Körper.
k: *Proportionalitätsfaktor* – sein Wert hängt von dem verwendeten Maßsystem ab.

Hintergrund: Ladung wird nicht direkt gemessen, sondern nur durch die von ihr ausgeübte Kraft erkannt.

Möglichkeiten zur Bestimmung des Maßsystems

1. Gaußsches Maßsystem: Man wählt $k = 1 \rightarrow F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$

Die Ladungen werden in mechanischen Einheiten angegeben (cm, g, s).

$$[F] = \frac{\mathrm{g \cdot cm}}{\mathrm{s}^2} = \frac{\lfloor q^2 \rfloor}{\mathrm{cm}^2} \quad \Rightarrow \quad [q] = \frac{\mathrm{cm}^{3/2}\mathrm{g}^{1/2}}{\mathrm{s}}$$

(eine elektrostatische Einheit)

2. „Praktische Maßeinheiten", beruhend auf dem SI-System:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 10^{-7}\,\mathrm{C}^2 = 10^{-7}\,\mathrm{A}^2\mathrm{s}^{-2}; \quad F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$[q] = \mathrm{A \cdot s} \qquad (\text{Stromstärke } \mathrm{A} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}})$$

Mit $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$ (Dielektrizitätskonstante des Vakuums)

Folgt $[F] = \frac{\mathrm{A^2 s^2 \cdot V \cdot m}}{\mathrm{As \cdot m^2}} = \frac{\mathrm{A \cdot V \cdot s}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{W \cdot s}}{\mathrm{m}}$

W: Leistung, Ws: Arbeit = Energie.

Zusammenhang mit mechanischen Einheiten:

$$1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{kg\,m^2/s^2}\,.$$

Bei theoretischen Betrachtungen ist es oft leichter, das Gaußsche Maßsystem zu verwenden (Proportionalitätsfaktor entfällt).

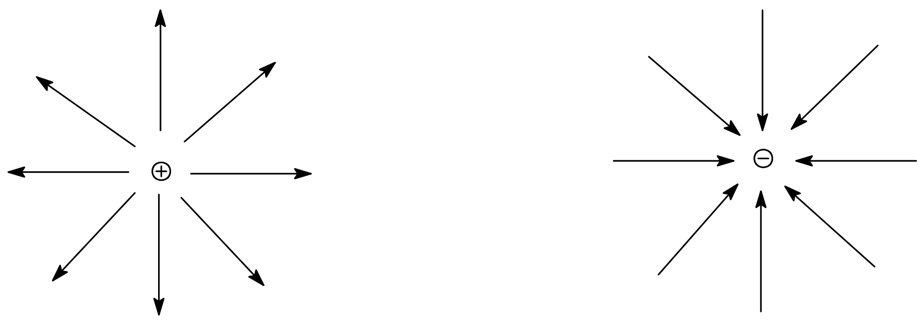
Elektrische Feldstärke*:* Als die von einer Ladung q_1 am Ort $\vec{r}$ der Probeladung q hervorgerufene Feldstärke definieren wir den Quotienten

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{q_1}{r^3}\vec{r} \qquad (q_1 \text{ am Ursprung}). \tag{2.3}$$

Allgemein

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_1(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|r - \vec{r}_1|^3} \tag{2.4}$$

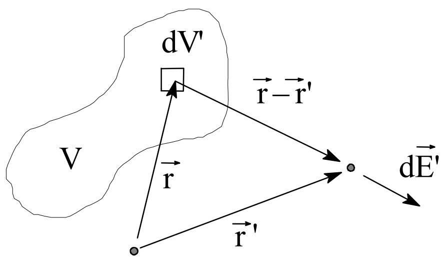
$\vec{E}$: elektrischer Feldvektor
$\vec{E}$ ist für positive Punktladungen q_1 nach außen und für negative Punktladungen nach innen gerichtet.



Für eine Summe von Punktladungen folgt aus dem Superpositionsprinzip

$$\vec{E} = \sum_i \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = \sum_i \vec{E}_i \,. \tag{2.5}$$

Haben wir eine kontinuierliche Ladungsverteilung, muss die Summation über eine Punktladung in eine Integration überführt werden: $\vec{E}_i \to d\vec{E}'$.

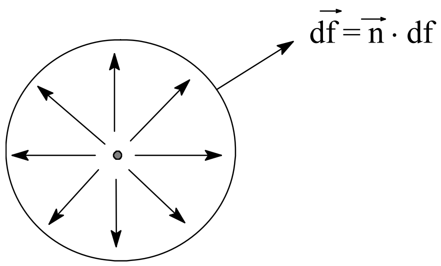


$$q_i \to \rho(\vec{r}\,')dV'\,; \quad \vec{r}_i \to \vec{r}\,'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{V'} \rho(\vec{r}\,') \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} dV' \tag{2.6}$$

2.1.1 Das Gaußsche Gesetz

Wir bestimmen den Fluss der durch eine Punktladung erzeugten Feldstärke $\vec{E}$ durch eine Oberfläche, die diese Punktladung umschließt (hier der Einfachheit halber eine Kugel).



$\vec{n}$: äußerer Normalenvektor

$|\vec{n}| = 1$

$\vec{E} = \frac{q}{r^3}\vec{r} \qquad \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot df = \frac{q}{r^3}\vec{r} \cdot \vec{n} \cdot df$

Wir integrieren über die Kugel (Oberfläche A mit $r = \text{const.}$) mit einer Punktladung q im Zentrum

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{f} = \oint \frac{q \cdot \vec{r} \cdot \vec{n} \cdot df}{r^3} \tag{2.7}$$

hier:

$\vec{r} \parallel \vec{n} \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{n} = r$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{f} = q \oint \frac{1}{r^2} df$$
$$= \frac{q}{r^2} \oint df = \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi q$$

Beachte: Kugelfläche $A = 4\pi r^2$

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{f} = 4\pi q} \qquad \textbf{Gaußsches Gesetz in Integralform} \tag{2.8}$$

Es lässt sich „leicht zeigen“, dass diese Formel für beliebig geformte geschlossene Oberflächen gilt, die die Ladung q umschließen.
Schließt die Oberfläche mehrere Ladungen ein, gilt nach dem Superpositionsprinzip

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{f} = 4\pi \sum_i q_i \tag{2.9}$$

oder bei kontinuierlichen Ladungsverteilungen

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{f} = 4\pi \int_V \rho(\vec{r}) \cdot dV . \tag{2.10}$$

Überführung des linken Oberflächenintegrals in ein Volumenintegral (Gaußscher Satz):

$$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{f} = \int_V \mathrm{div}\vec{E}\cdot dV = 4\pi\int_V \rho(\vec{r})\cdot dV$$

$$\int_V \left\{\mathrm{div}\vec{E} - 4\pi\rho(\vec{r})\right\}\cdot dV = 0 \tag{2.11}$$

Das gilt für beliebige Volumina. Demzufolge

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho} \qquad \textbf{Gaußsches Gesetz in differentieller Form} \tag{2.12}$$

mit $\quad \mathrm{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$.

2.1.2 Das elektrische Potential

Das elektrische Feld $\vec{E}$ lässt sich als Gradient eines Potentials schreiben.
Wir hatten:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{V'} \rho(r')\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}dV' \qquad \text{mit}\;\; dV' = dx'dy'dz'$$

Wir berücksichtigen, dass

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\frac{(x-x')}{\left[\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right]^3} = -\frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Entsprechend:

$$\mathrm{grad}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] = -\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Damit:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\int_{V'} \rho(\vec{r}\,')\,\mathrm{grad}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]dV'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\underbrace{\int_{V'} \rho(\vec{r}\,')\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'}_{\varphi(\vec{r})} \tag{2.13}$$

Potential einer Ladungsverteilung:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{2.14}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\varphi(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) \qquad \nabla\text{: Nabla-Operator} \tag{2.15}$$

Es gilt stets: rot grad $\varphi = 0$ und deshalb rot$\vec{E} = 0$

$$\text{denn } \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi \quad \text{bedeutet:} \quad \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial x \\ \partial\varphi/\partial y \\ \partial\varphi/\partial z \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \begin{pmatrix} \partial E_z/\partial y - \partial E_y/\partial z \\ \partial E_x/\partial z - \partial E_z/\partial x \\ \partial E_y/\partial x - \partial E_x/\partial y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y} = 0 \quad \text{usw.}$$

Damit erhalten wir die ersten beiden **Maxwellgleichungen** für den statischen Fall:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = 0}$$

Feldgleichungen der Elektrostatik

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho \quad \text{– „inhomogene Feldgleichung“} \tag{2.17}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0 \quad \text{– „homogene Feldgleichung“} \tag{2.18}$$

Andererseits gilt nach dem Gaußschen Gesetz:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho$$

und mit den Gleichungen 2.15 und 2.16

$$-\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = 4\pi\rho = -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) = -\Delta\varphi$$

$\boxed{\Delta\varphi = -4\pi\rho}$ **Poissongleichung**, Δ: Laplace-Operator (2.19)

Im ladungsfreien Raum gilt: $\Delta\varphi = 0$ **Laplace-Gleichung** (2.20)

2.1.3 Potential einer Punktladung q (lokalisiert bei $\vec{r}\,'$)

Wir zeigen, dass ein Potential $\varphi(\vec{r}) = \dfrac{q}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$ die Poissongleichung erfüllt.

Sei $\vec{r}\,' = 0$: Ladung im Koordinatenursprung

$$\varphi(r) = \frac{q}{r}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{q}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{q}{r^2}\frac{x}{r} = -\frac{q \cdot x}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{3q \cdot x}{r^4}\frac{x}{r} - \frac{q}{r^3} = \frac{3qx^2}{r^5} - \frac{q}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{3q\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}{r^5} - \frac{3q}{r^3} = 0$$

Weiterhin muss gelten:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{f} = 4\pi q \quad \text{mit} \quad \vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\text{grad}\left(\frac{q}{r}\right)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{f} = -q \cdot \oint \text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) \cdot d\vec{f}$$

Integration über Kugel: $d\vec{f} = df\,\dfrac{\vec{r}}{r} = df \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix}$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{f} = q\oint \frac{1}{r^2} \underbrace{\begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix}}_{=1} df$$

$$= q\oint \frac{1}{r^2} df = \frac{q}{r^2}\oint df = \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi q$$

gilt für jede Umgebung von q (auch für $r \to 0$).

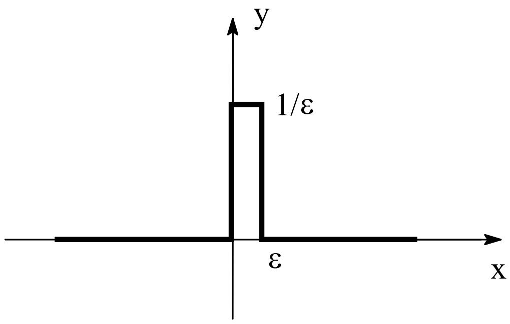
2.1.4. Distributionen

δ-Funktionen Um auch Punktladungen als Grenzfall kontinuierlich verteilter Ladungen zu behandeln, führt man δ-Funktionen ein (Dirac).

Allgemein ist eine Distribution $\delta(x)$ dadurch definiert, dass für eine beliebige (aber stetige und integrable) Testfunktion $f(x)$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0). \tag{2.21}$$

1. Wir betrachten folgende Funktion:

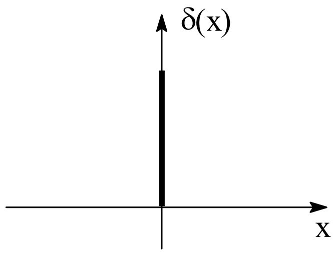


$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0,\ x > \varepsilon \\ 1/\varepsilon & \text{für } 0 \le x \le \varepsilon \end{cases} \tag{2.22}$$

Integration:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) dx = \int_{-\infty}^{0} \delta_\varepsilon(x) dx + \int_{0}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) dx$$
$$= \int_{0}^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\, dx = 1$$

für beliebig kleine Werte ε. Im Grenzfall: $\varepsilon \to 0$ entsteht:



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1 \tag{2.23}$$

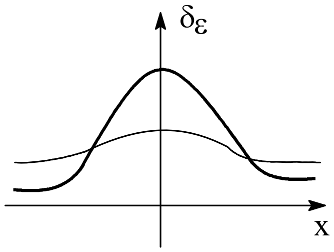
Allgemein: $\delta = \delta(x - a)$ ist keine Funktion im eigentlichen Sinne, sondern eine "Distribution".

$$x = a: \quad \delta \to \infty$$
$$x \ne a: \quad \delta = 0$$

Die δ-Funktion wird hier als Grenzfall einer bestimmten Funktion eingeführt.
Es gibt dafür andere Möglichkeiten:

2. $\delta_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\pi}\varepsilon} e^{-x^2/\varepsilon^2}$ **Gaußsche Verteilungsfunktion** (2.24)

$$\delta_\varepsilon(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\varepsilon} \to \infty \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0 \tag{2.25}$$



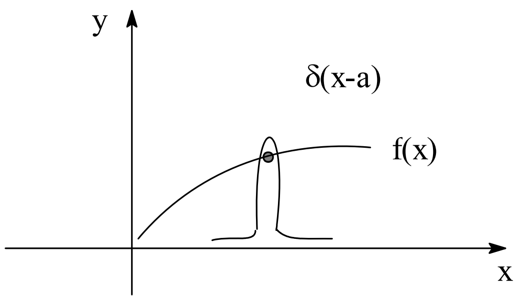
Diese Funktion hat ebenfalls die Eigenschaft: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) = 1$ unabhängig von ε.

3. $\delta_\varepsilon = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\left(\varepsilon^2 + x^2\right)}$ (2.26)

$$x \to 0: \quad \delta_\varepsilon = \frac{1}{\pi \cdot \varepsilon} \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) dx = 1$$

Es lässt sich zeigen:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0); \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) = f(a) \tag{2.27}$$



Über diese Integrale wird mittels der δ-Funktion der Funktion $f(x)$ ihr Funktionswert am Ort $x = a$ zugeordnet.

Beweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = \int_{0}^{\varepsilon} f(x)\frac{1}{\varepsilon}dx$$

$$f(x) = f(0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=0} x^2 + \ldots$$

$$\int_{0}^{\varepsilon}\left\{f(0) + f'\cdot x + \frac{1}{2}f''\cdot x^2 + \ldots\right\}\frac{1}{\varepsilon}dx$$

$$= \frac{f(0)}{\varepsilon}\int_{0}^{\varepsilon}dx + \frac{f'}{\varepsilon}\int_{0}^{\varepsilon}xdx + \frac{1}{2\varepsilon}f''\int_{0}^{\varepsilon}x^2dx + \ldots$$

$$= f(0) + \frac{f'}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{f''}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon^3}{3} + \ldots$$

$\varepsilon \to 0$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\delta(x)dx = f(0).$$

Außerdem gilt (gewonnen aus partieller Integration):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-a)dx = f(x)\delta(x-a)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x-a) = -f'(a)\ . \tag{2.28}$$

"Mehrdimensionale" δ-Funktion

$$\delta(\vec{r}-\vec{a}) = \delta(x-a_x)\,\delta(y-a_y)\,\delta(z-a_z) \tag{2.29}$$

Maßeinheit der eindimensionalen δ-Funktion: $[\delta] = \frac{1}{\text{cm}}$.

Allgemein im 3-dimensionalen Raum: $[\delta] = \frac{1}{\text{cm}^3}$.

Darstellung der Ladungsverteilung einer Menge von Punktladungen an Orten $\vec{a}_i$:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \, \delta(\vec{r} - \vec{a}_i) \tag{2.30}$$

$$\int_V \rho(\vec{r}) dV = \sum_{i=1}^{N} q_i = q \tag{2.31}$$

2.1.5. Feldlinien

Unter Äquipotentiallinien versteht man den geometrischen Raum aller Punkte mit dem gleichen Wert von $\varphi(\vec{r})$:

$\varphi(\vec{r}) = \text{const.}$ Äquipotentialfläche

Die Flächennormalen zeigen in die Richtung von

$$\text{grad}\varphi = -\vec{E}(\vec{r})$$

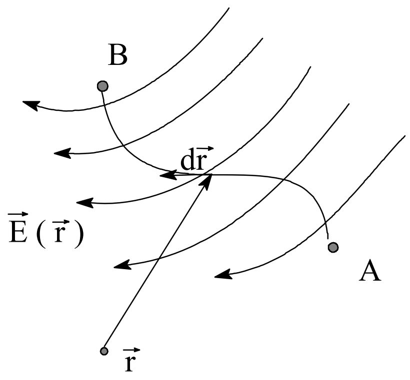
Die Linien, für die die Vektoren $\vec{E}(\vec{r})$ an jedem Punkt die Tangentenrichtung angeben, heißen Feldlinien. Eine Kurve $\vec{r} = \vec{r}(\lambda)$ ist eine Feldlinie, falls

$$\frac{d\vec{r}(\lambda)}{d\lambda} \times \vec{E}(\vec{r}(\lambda)) = 0 \tag{2.32}$$

Die Ableitung von $\vec{r}(\lambda)$ nach dem Bahnparameter λ ergibt einen Tangentenvektor an die Kurve; dieser muss für jedes λ parallel zum Feld sein.
In der Elektrostatik gibt es keine geschlossenen Feldlinien (Beweis mittels Anwendung des Satzes von Stokes auf $\text{rot}\,\vec{E} = 0$).

Abbildung

2.1.6 Potentielle Energie einer Ladung im elektrischen Feld



Wird eine Ladung q in einem elektrischen Feld $\vec{E}$ bewegt, dann wirkt auf diese Ladung definitionsgemäß die Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}). \tag{2.33}$$

Arbeit W als Wegintegral:

$$W = -\int_A^B \vec{F}(r')dr' = -q\int_A^B \vec{E}(\vec{r}\,')d\vec{r}\,' \tag{2.34}$$

($W > 0$, wenn gegen Feldkraft gerichtet → negatives Vorzeichen)

$$\begin{aligned} W &= q\int_A^B \mathrm{grad}\varphi \; d\vec{r}\,' = q\int_A^B \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x'}dx' + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}dy' + \frac{\partial\varphi}{\partial z'}dz' \right) \\ &= q\int_A^B d\varphi = q(\varphi(B) - \varphi(A)) \end{aligned} \tag{2.35}$$

Die auf dem Weg von A nach B verrichtete Arbeit entspricht genau der Differenz der potentiellen Energie (hier elektrische Potentialdifferenz $\times q$) an beiden Punkten.
Die Arbeit W ist wegunabhängig.
Wenn Punkt A im Unendlichen liegt, so dass $\varphi(A) = 0$, dann gilt:

$$W(\vec{r}) = q \cdot \varphi(\vec{r}) \tag{2.36}$$

W: potentielle Energie der Ladung q im elektrostatischen Feld $\vec{E}$.

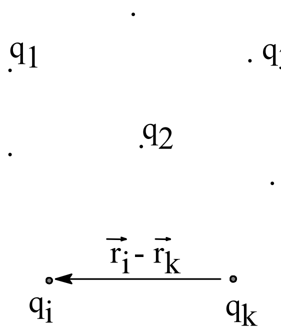
Längs der Äquipotentiallinien kann man Ladungen ohne Arbeitsaufwand verschieben.

2.1.7 Energie und Energiedichte einer Ladungsverteilung

Ausgangspunkt: Potentielle Energie W einer Punktladung q in einem elektrischen Feld φ (W statt V, um Verwechslung mit Volumen V zu vermeiden) gemäß Gleichung 2.36.

$$W = q\varphi$$

Energie einer Ladungsanordnung in ihrem eigenen Feld:



Zunächst denken wir uns alle Ladungen unendlich weit voneinander entfernt. Der gesamte Raum ist feldfrei. Potentielle Energie $\hat{=}$ Arbeit, die notwendig ist, um die Ladungen q_i an die Orte $\vec{r}_i$ zu bringen.

Um die erste Ladung an den Ort $\vec{r}_1$ zu bringen, ist keine Arbeit erforderlich. Die Ladung q_1 ruft aber ein Feld $\varphi_1(\vec{r}) = \dfrac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$ hervor.

Um die zweite Ladung an den Ort $\vec{r}_2$ zu bringen, ist die Arbeit

$$W_2 = q_2 \varphi_1(\vec{r}_2) = \frac{q_2 q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

erforderlich. Beide Ladungen erzeugen das Feld

$$\varphi_2(\vec{r}) = \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|}.$$

Für die Anordnung der Ladung q_3 muss deshalb die Arbeit

$$W_3 = \frac{q_3 q_1}{\left|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\right|} + \frac{q_3 q_2}{\left|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\right|} = q_3 \varphi_2(\vec{r}_3)$$ geleistet werden.

Addition aller Arbeitsleistungen:

$$W = \sum_{i=2}^{N} q_i \left(\sum_{k=1}^{i-1} \frac{q_k}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_k\right|} \right)$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k \neq i}^{N} \frac{q_i q_k}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_k\right|} \tag{2.37}$$

Übergang zu kontinuierlichen Ladungsverteilungen

$$q_i \to \rho(\vec{r})dV \; ; \quad q_k \to \rho(\vec{r}\,')dV'$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} dV' \, dV \tag{2.38}$$

Für das Potential einer Ladungsverteilung hatten wir früher abgeleitet (Gl. 2.14):

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')dV'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} \; ,$$

so dass

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})dV \; . \tag{2.39}$$

Die Wechselwirkungsenergie *W* lässt sich als Integral über die Feldstärke ausdrücken.

Unter Verwendung der Poissongleichung

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$$

$$\rho(\vec{r}) = -\frac{\Delta\varphi}{4\pi}$$

folgt: $$W = -\frac{1}{8\pi} \int_V \varphi \, \Delta\varphi \, dV \tag{2.40}$$

Es gilt allgemein die Beziehung:

$$a \, \Delta a = \operatorname{div}(a \operatorname{grad} a) - (\operatorname{grad} a)^2$$ (a: skalare Funktion).

Beweis:

$$a\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}\right)\overset{!}{=}\operatorname{div}\left(a\begin{bmatrix}\partial a/\partial x\\ \partial a/\partial y\\ \partial a/\partial z\end{bmatrix}\right)-\left(\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)^2\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial a}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial a}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(a\frac{\partial a}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)^2$$

Demzufolge erhält man:

$$W=-\frac{1}{8\pi}\int \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\varphi)\,dV+\frac{1}{8\pi}\int(\operatorname{grad}\varphi)^2\,dV \tag{2.41}$$

Das erste Integral lässt sich in ein Oberflächenintegral umwandeln.

$$\int \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\varphi)\,dV=\oint\!\!\oint(\varphi \operatorname{grad}\varphi)\,d\vec{f}$$

Dieses Integral ist gleich 0, wenn über unendlich großen Raum integriert wird, da im Unendlichen $\varphi\to 0$.

$$W=\frac{1}{8\pi}\int \vec{E}(\vec{r})^2\,dV \tag{2.42}$$

Energiedichte des elektrischen Feldes:

$$w(\vec{r})=\frac{1}{8\pi}\vec{E}(\vec{r})^2 \tag{2.43}$$

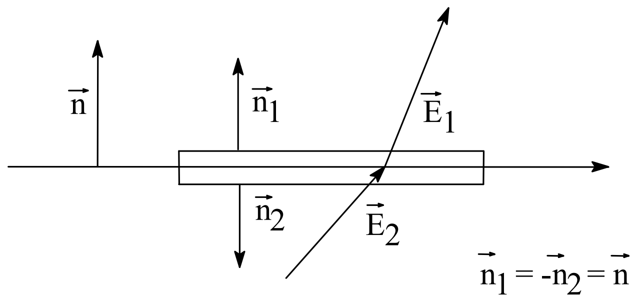
2.2 Anwendungsbeispiele

2.2.1 Elektrische Feldstärke beim Durchgang durch geladene Flächen

Eine Ladung sei homogen auf einer unendlich großen Fläche verteilt (keine Randeffekte).

Flächenladung: $\sigma = \frac{q}{F}$ (F: Fläche eines betrachteten Teilstücks)

a) Gaußscher Satz $\oint \vec{E} d\vec{f} = 4\pi q = 4\pi \int_V \rho(\vec{r}) dV$



(anstelle von Fläche: Quader, beliebig dünn, Fluss durch Seitenflächen vernachlässigt)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{f} = \left(\vec{E}_1 \vec{n}_1 + \vec{E}_2 \vec{n}_2\right) F = 4\pi q = 4\pi\sigma \cdot F$$

$$\Rightarrow \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) \vec{n} = 4\pi\sigma \tag{2.44}$$

$\vec{E}_1 \vec{n}, \vec{E}_2 \vec{n}$: Normalkomponenten des elektrischen Feldes auf beiden Seiten.

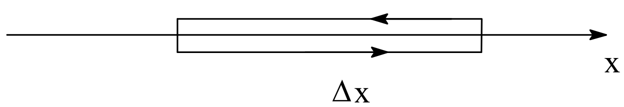
Die Normalkomponente des elektrischen Feldes ändert sich beim Durchgang durch eine geladene Fläche sprungartig.

$E_{n,1} = 4\pi\sigma + E_{n,2}$

b) Da sich die Feldstärke aus einem Potential herleiten lässt, muss das Umlaufintegral verschwinden:

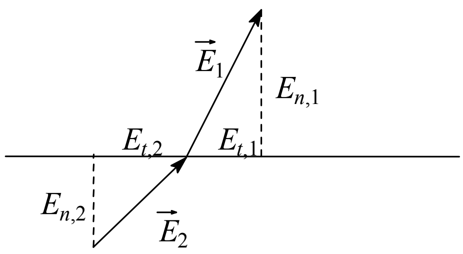
$$\oint \vec{E} d\vec{r} = 0 = E_{x,1} \Delta x - E_{x,2} \Delta x = 0$$

$$\Rightarrow E_{x,1} = E_{x,2}$$



allgemein: $E_{t,1} = E_{t,2}$

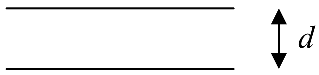
Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes ändert sich beim Durchgang durch eine geladene Fläche nicht.



2.2.2 Kondensatoren

Es existieren verschiedene Typen von Kondensatoren, z.B. Plattenkondensator, Kugelkondensator, Zylinderkondensator.

Plattenkondensator: zwei leitende, ebene Platten, parallel, mit Abstand d.
Randeffekte vernachlässigt.



Auf jeder Fläche: konstante Ladungsdichte: $\sigma = \dfrac{q}{F}$

Zwischen den Platten gilt: $E = 4\pi\sigma = 4\pi\dfrac{q}{F}$ (2.45)

Feldstärke innerhalb des Kondensators ist konstant. Außerhalb existiert kein Feld.

Potentialdifferenz der Platten:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_0^d \vec{E}\, d\vec{r} = -\int_0^d E\, dx = -E\int_0^d dx = -Ed$$

Spannung des Plattenkondensators: $U = \varphi_1 - \varphi_2 = 4\pi\dfrac{q}{F}d$ (2.46)

Kapazität des Plattenkondensators: $C = \dfrac{q}{\Delta\varphi} = \dfrac{q}{U}$ (2.47)

Entspricht der Aufnahmefähigkeit dieser Anordnung für Ladung.

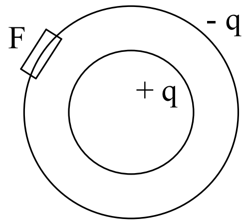
Kugelkondensator
Wir betrachten eine geladene Kugeloberfläche (Radius R).
Oberflächenintegral im Abstand $r > R$

Der Einfachheit: nur Berücksichtigung der r-Komponente des Feldes (in Kugelkoordinaten), die anderen existieren nicht.

$$\oint \vec{E} d\vec{f} = E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q$$

$$E = \frac{q}{r^2}; \quad \varphi = \frac{q}{r} \tag{2.48}$$

Weiterhin betrachten wir zwei konzentrische Kugeln mit entgegengesetzt gleichen Ladungen:



Feld außerhalb und innerhalb der Anordnung = 0

Potentialdifferenz für beide Radien $r = R$ und $r = R + \Delta R$:

$$\Delta\varphi = q\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + \Delta R}\right) = q\frac{\Delta R}{R(R + \Delta R)} \tag{2.49}$$

Kapazität definiert als $C = \dfrac{q}{\Delta\varphi}$

$$C = \frac{R(R + \Delta R)}{\Delta R} \tag{2.50}$$

Für $\Delta R << R$ gilt näherungsweise

$$\Delta\varphi = \frac{q\Delta R}{R^2} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{R^2}{\Delta R} \ .$$

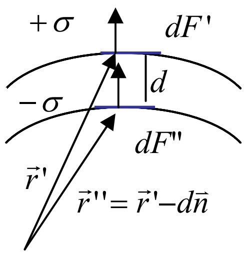
Aus Symmetriegründen sind die Ladungen gleichmäßig auf den Kugeloberflächen verteilt. Auch die Potentialdifferenz ist überall die gleiche. Ein Teilstück F trägt die Ladung:

$$\Delta q = \frac{F \cdot q}{4\pi R^2}$$

$$C_F = \frac{\Delta q}{\Delta\varphi} = \frac{F \cdot q}{4\pi R^2}\frac{R^2}{q\Delta R} = \frac{F}{4\pi\Delta R} = \frac{F}{4\pi \cdot d} \ . \tag{2.51}$$

Die Kapazität C_F eines Teilstückes F ist somit unabhängig vom Radius und gilt demzufolge auch für $R \to \infty$ (wie beim Plattenkondensator).

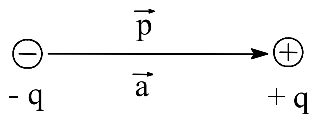
2.3 Potential und Feldstärke eines Dipols



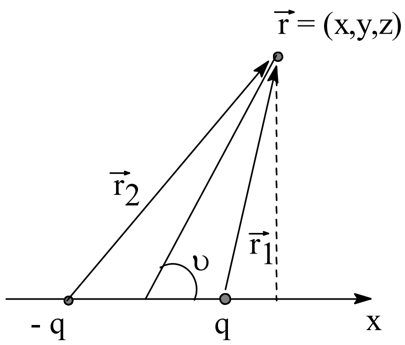
Dipoldichte: Grenzwert, dem das Produkt aus Ladungsdichte und lokalem Abstand zustrebt, wenn der Abstand gegen 0 geht:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \lim_{d \to 0} \sigma(\vec{r}')\, d(\vec{r}')\, \vec{n}(\vec{r}') \qquad (2.52)$$

Einfacher: nur zwei Punktladungen:



Dipolmoment $\vec{p}$: Vektor, der von negativer zu positiver Ladung zeigt. Produkt von Ladung und Abstandsvektor: $\vec{p} = q\vec{a}$



$$\varphi = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}$$

Im Folgenden betrachten wir φ für große Abstände $r_1, r_2 >> a$

$$r_1 = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - ax + \frac{a^2}{4}}$$

$$r_1 = r\sqrt{1 - \frac{a \cdot x}{r^2} + \frac{a^2}{4r^2}}$$

Vernachlässigen des quadratischen Terms, Entwicklung der Wurzel:

$$r_1 \cong r\left(1 - \frac{a \cdot x}{2r^2}\right)$$

Analog: $$r_2 \cong r\left(1 + \frac{a \cdot x}{2r^2}\right)$$

$$\varphi = \frac{q}{r}\left(\frac{1}{1 - \dfrac{a \cdot x}{2r^2}} - \frac{1}{1 + \dfrac{a \cdot x}{2r^2}}\right)$$

$$\varphi = \frac{q}{r}\frac{a \cdot x / r^2}{\left(1 - a^2 x^2 / 4r^4\right)} \cong \frac{q \cdot a \cdot x}{r^3}$$

Allgemein: $\varphi = \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$ z. B. $\varphi = 0$ für $\vec{p} \perp \vec{r}$ (2.53)

hier:

$$\vec{p} = (a \cdot q, 0, 0)$$
$$\varphi = \frac{(a \cdot q, 0, 0) \cdot (x, y, z)}{r^3} = \frac{q \cdot a \cdot x}{r^3}$$

Feldstärke:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{q \cdot a}{r^3} - \frac{3a \cdot x^2 q}{r^5} = \frac{q \cdot a}{r^3} - \frac{3qax^2}{r^5}$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{3qaxy}{r^5}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{3qaxz}{r^5}$$

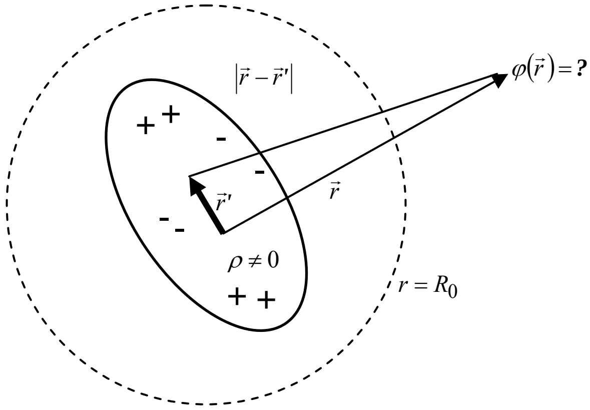
$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$$
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 3qax^2 / r^5 - qa / r^3 \\ 3qaxy / r^5 \\ 3qaxz / r^5 \end{pmatrix}$$

Spezialfall von:

$$\vec{E} = \frac{3\vec{e}_r(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) - \vec{p}}{r^3}; \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} \qquad (2.54)$$

Allgemeiner: Multipolentwicklung:

Wir betrachten eine statische lokalisierte Ladungsverteilung.
(In der Abbildung liegt die elliptisch begrenzte Ladungsverteilung innerhalb einer Kugel $r = R_0$. Im Bereich $r > R_0$ wird das Potenzial $\varphi(\vec{r})$ nach Potenzen von R_0/r entwickelt.)



$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \text{beliebig}, & r < R_0 \\ 0, & r > R_0 \end{cases}$$

Im Bereich $r > R_0$ kann das elektrostatische Potenzial $\varphi(\vec{r})$ nach Potenzen von R_0/r entwickelt werden. Wir benutzen hier die Darstellung in kartesischen Koordinaten.

Wir gehen aus von Gleichung 2.14

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' \ .$$

Der Abstand $|\vec{r}-\vec{r}'| = \left((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ hängt von den kartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 und x'_1, x'_2, x'_3 ab. Wir entwickeln den inversen Abstand in eine Taylorreihe nach Potenzen von x'_1, x'_2, x'_3:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} - \sum_{i=1}^{3} x'_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} x'_i \, x'_j \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r} + \ldots \tag{2.55}$$

Dazu benutzt: $\left[\frac{\partial}{\partial x'_i}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]_{r'=0} = -\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]_{r'=0} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r}$

Wegen $\Delta\frac{1}{r} = 0$ im Bereich $r > R_0$ können wir den letzten Term in (2.55) auch wie folgt ergänzen (und damit das Ergebnis vereinfachen):

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} - \sum_{i=1}^{3} x'_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\left(x'_i \, x'_j - r'^2 \frac{\delta_{ij}}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r} + \ldots \tag{2.56}$$

Wir führen folgende kartesische Multipolmomente ein:

$$q(\vec{r}) = \int_{V'} \rho(\vec{r}\,')dV' \qquad \text{Ladung} \qquad (2.57)$$

$$p_i(\vec{r}) = \int_{V'} x'_i\, \rho(\vec{r}\,')dV' \qquad \text{Dipolmoment} \qquad (2.58)$$

$$Q_{ij}(\vec{r}) = \int_{V'} \left(3x'_i\, x'_j - r'^2\, \delta_{ij}\right)\rho(\vec{r}\,')dV' \qquad \text{Quadrupolmoment} \qquad (2.58)$$

Unter orthogonalen Transformationen ist q ein Skalar, p_i ein Vektor und Q_{ij} ein Tensor zweiter Stufe.

Wir multiplizieren (2.56) mit $\rho(\vec{r}\,')dV'$ und führen die Integration aus; dies ergibt das Potenzial $\varphi(\vec{r})$ und dann benutzen wir oben aufgeführte Momente (2.57–2.59)

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV' = \frac{q}{r} - \sum_{i=1}^{3} p_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r} + \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r} + \ldots \qquad (2.60)$$

Wir führen die Differenziation aus und erhalten:

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{r} - \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij}\frac{x_i x_j}{r^5} + \ldots \qquad (r > R_0)} \qquad (2.61)$$

Dies ist eine Entwicklung nach Potenzen von R_0/r. Die explizit aufgeführten Beiträge sind das ***Monopol***-, das ***Dipol***- und das ***Quadrupolfeld***.

Anmerkung: Wir haben benutzt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r} = -\frac{x_i}{r^3} \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = 3\frac{x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3}$$

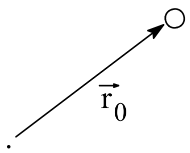
Da die Spur der Matrix Q_{ij} verschwindet, ($\sum_{i=1}^{3} Q_{ii} = 0$), führt der letzte Term in (2.56) zu keinem Beitrag. Die Spurfreiheit des Quadrupoltensors haben wir durch Zufügen des Terms mit δ_{ij} erreicht; dadurch wurde das Ergebnis vereinfacht.

2.4 Elektrostatik in Substanzen

Die Elektrostatik in Substanzen weicht von der im Vakuum ab. Grund dafür ist die Tatsache, dass Substanzen aus Molekülen und Atomen bestehen, die ihrerseits aus elektrisch geladenen Bestandteilen aufgebaut sind. Unter dem Einfluss elektrischer Felder kommt es zu Verschiebungen der einzelnen Komponenten der Substanzen. Bisher hatten wir die Lage der Ladungen als fest vorgegeben betrachtet. Durch Trennung der Ladungen entstehen in den Substanzen viele Dipole und dadurch eine Polarisation der Substanz.

Wir untersuchen die mit Dipolen verbundene Ladungsdichte.

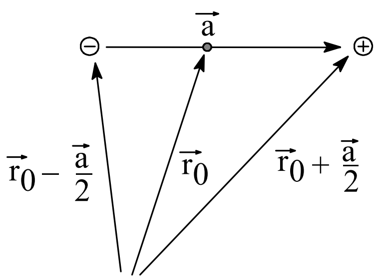
a) einzelne Punktladung am Ort $\vec{r}_0$:



$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}) &= q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\\ &= q\,\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\end{aligned}$$

b) einzelner Dipol

$$\rho(\vec{r}) = q\,\delta\left(\vec{r}-\left(\vec{r}_0+\frac{\vec{a}}{2}\right)\right) - q\,\delta\left(\vec{r}-\left(\vec{r}_0-\frac{\vec{a}}{2}\right)\right) \tag{2.62}$$



Wir betrachten $\delta(\vec{r})$ als differenzierbar (z.B. δ_ε-Funktion). Dann kann man δ in eine Potenzreihe entwickeln und erhält für sehr kleine $|\vec{a}|$

$$\rho(\vec{r}) = q\left[\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) - \frac{\vec{a}}{2}\ \operatorname{grad}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\right] - q\left[\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) + \frac{\vec{a}}{2}\ \operatorname{grad}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\right]$$

$$\rho(\vec{r}) = -q\vec{a}\ \operatorname{grad}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \tag{2.63}$$

$$\rho(\vec{r}) = -\vec{p}\ \operatorname{grad}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \tag{2.64}$$

Für eine Anordnung von vielen Dipolen folgt

$$\rho(\vec{r}) = -\sum_i \vec{p}_i \ \mathrm{grad}\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \qquad \vec{r}_i\text{: Ort des Dipoles } i. \tag{2.65}$$

Wenn $\vec{p}_i = \text{konst.}$, ergibt sich daraus

$$\rho(\vec{r}) = -\,\mathrm{div} \sum_i \vec{p}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)\ , \tag{2.66}$$

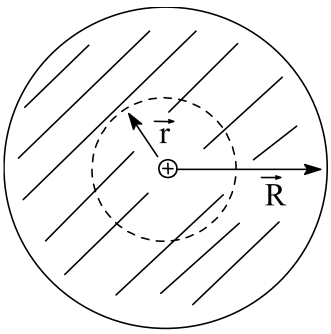
wobei wir $\mathrm{div}\,(\vec{a} \cdot b) = b(\,\mathrm{div}\,\vec{a}) + \vec{a}\ \mathrm{grad}\, b$ berücksichtigt haben.

Definition der Dipoldichte:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \ \Rightarrow \ \rho(\vec{r}) = -\mathrm{div}\, \vec{P}, \qquad \text{mit } \vec{P}\text{: Polarisation} \tag{2.67}$$

Dielektrizität: Wir betrachten elektrische Felder in Nichtleitern, d. h. in Substanzen, bei denen die Elektronen in ihren Atomen lokalisiert bleiben.

"Primitives" Atommodell:



Proton im Koordinatenursprung;
Elektronen "verschmiert" über eine Kugel vom Radius R.

Welches Feld $\vec{E}_i$ erzeugen die verschmierten Elektronen?

Gaußscher Satz:

$$\oint \vec{E}_i d\vec{f} = 4\pi q$$

Bei Integration über eine Kugeloberfläche vom Radius $r \leq R$

$$-\frac{q}{e} = \frac{V(r)}{V(R)} = \frac{r^3}{R^3}$$

$$E_i 4\pi r^2 = -\frac{4\pi e \cdot r^3}{R^3}$$

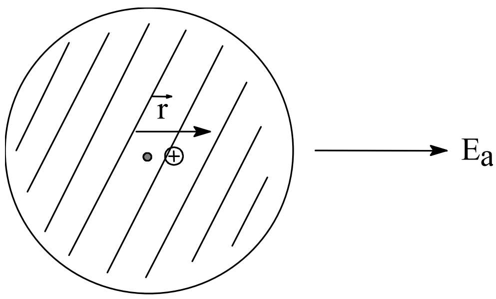
$$E_i = -\frac{e \cdot r}{R^3} \quad ; \quad \vec{E}_i = E_i \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{e \cdot \vec{r}}{R^3}$$

$\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{E}_i = 0$ Proton befindet sich im Mittelpunkt der Ladungsverteilung in Ruhe.

Neben dem Feld $\vec{E}_i$, das durch die Elektronen hervorgerufen wird, soll ein äußeres Feld $\vec{E}_a$ existieren.

Im Gleichgewicht gilt: $\vec{E}_a + \vec{E}_i = 0$

$$\vec{E}_a - \frac{e \cdot \vec{r}}{R^3} = 0 \quad ; \quad \vec{r} = \frac{\vec{E}_a R^3}{e} \tag{2.68}$$



Das Atom besitzt als Ganzes näherungsweise das Dipolmoment

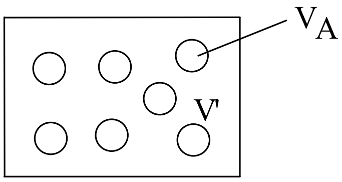
$$\vec{p} = e\vec{r} = \vec{E}_a \cdot R^3$$

$$\vec{p} = \vec{E}_a \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{3}{4\pi} = \vec{E}_a V_A \frac{3}{4\pi} \tag{2.69}$$

wobei V_A das Atomvolumen bezeichnet, das dem einzelnen Elektron zur Verfügung steht.

Gesamtdipolmoment bei N Atomen:

$$\vec{p}_{\text{ges}} = N \cdot V_A \cdot \vec{E}_a \frac{3}{4\pi} \tag{2.70}$$



$$V_{\text{ges}} = N \cdot V_A + V'$$

Dipoldichte: $\vec{P} = \dfrac{\vec{p}_{\text{ges}}}{V_{\text{ges}}} = \underbrace{\left(\dfrac{N \cdot V_A}{N \cdot V_A + V'} \right)}_{\leq 1} \dfrac{3}{4\pi} \vec{E}_a$ (2.71)

(Gleichheitszeichen gilt bei dichtester Packung.)

$\vec{P} = \chi \vec{E}$, $\quad \chi$: dielektrische Suszeptibilität (2.72)

Feldberechnung in dielektrischen Substanzen

Die elektrische Feldstärke im Vakuum wurde bisher aus der Grundgleichung 2.17

$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$ (oder mit $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ aus $\Delta\varphi = -4\pi\rho$)

berechnet.

Die Gleichung kann auch bei Anwesenheit von Substanzen aufrechterhalten werden, wenn man unter ρ nicht nur die makroskopischen Ladungen, sondern auch die mikroskopischen Ladungen in den Substanzen versteht.

$\rho_{\text{gesamt}} = \rho + \rho_p$. $\quad \rho_p$: Ladungen, die von der Polarisierung der Substanz herrühren

Wir hatten

$$\rho_p = -\operatorname{div} \vec{P},$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi(\rho + \rho_p) = 4\pi(\rho - \operatorname{div} \vec{P}),$$

$$\operatorname{div}(\vec{E} + 4\pi \vec{P}) = 4\pi\rho. \tag{2.73}$$

Es wird ein neuer Feldvektor eingeführt, die "dielektrische Verschiebung":

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}. \tag{2.74}$$

Wegen $\vec{P} = \chi \vec{E}$ gilt

$$\vec{D} = (1 + 4\pi\chi)\vec{E} = \varepsilon \vec{E} \, . \tag{2.75}$$

ε: Dielektrizitätskonstante.

$$\boxed{\operatorname{div}\left(\varepsilon \vec{E}\right) = 4\pi\rho} \qquad \text{Gaußsches Gesetz in Dielektrika} \tag{2.76}$$

Im allgemeinen Fall kann ε ortsabhängig sein. Dann gilt $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$.

$$(\operatorname{grad} \varepsilon)\vec{E} + \varepsilon \cdot \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \; .$$

Im einfachsten Fall gilt ε = konst. und damit:

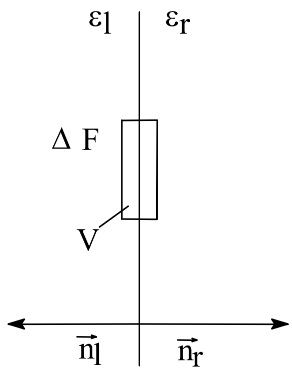
$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon} \; . \tag{2.77}$$

Wenn ε konstant ist, ist die Feldberechnung also nicht schwieriger als im Vakuum.

Spezialfall: ε ist gebietsweise konstant. Dieser Fall ist von großer praktischer Bedeutung, z. B. für die Berechnung von Feldern an biologischen Membranen.

$\varepsilon = 80$	$\varepsilon \cong 2$	$\varepsilon = 80$
Elektrolyt	Membran	Elektrolyt

Wie ändert sich das Feld beim Durchgang durch die Grenzfläche?



keine makroskopischen Ladungen
an der Oberfläche.

$$\int_V \left(\operatorname{div} \vec{D}\right) dV = 0$$

$$\Rightarrow \quad \oint\!\!\!\oint \vec{D} \, d\vec{f} = 0$$

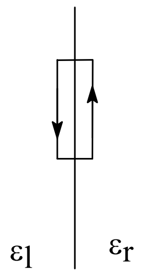
$$\left(\vec{D}_l \vec{n}_l + \vec{D}_r \vec{n}_r\right)\Delta F = 0 \, ; \quad \vec{n}_l = -\vec{n}_r$$

$\Rightarrow \quad D_{n,l} = D_{n,r}$

Die Normalkomponente des Vektors $\vec{D}$ ist an der Grenzfläche stetig. Wegen $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ gilt

$\varepsilon_l E_{n,l} = \varepsilon_r E_{n,r}$

Die Normalkomponente von $\vec{E}$ ändert sich sprunghaft.



rot $\vec{E} = 0$

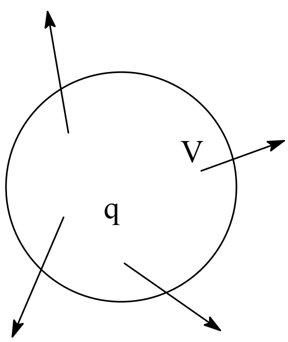
$\Rightarrow \quad E_{t,l} = E_{t,r}$

Die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ ist stetig.

(Ähnlich wie beim Feld, das in der Nähe geladener Oberflächen existiert.)

2.5 Elektrischer Strom und Stromdichte

Bisher: statische Ladungen. Nun: bewegliche Ladungen, damit auch Zeitabhängigkeit
Ausgangspunkt: Ladungserhaltung



$$I = \frac{dq}{dt} \qquad (2.78)$$

$$\text{Strom} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}}$$

I: Ladungen, die pro Zeiteinheit durch die Oberfläche von innen nach außen strömen.

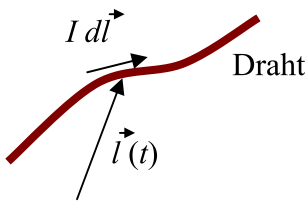
$$q = \int_V \rho dV \quad ; \quad I = \oint \vec{j} d\vec{f} \qquad \vec{j}: \text{Stromdichte} \qquad (2.79)$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV + \oint \vec{j} d\vec{f} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV + \int_V \operatorname{div} \vec{j} \cdot dV = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \qquad \text{Kontinuitätsgleichung für Ladung} \tag{2.80}$$

Beispiel: Stromdurchflossener dünner Draht



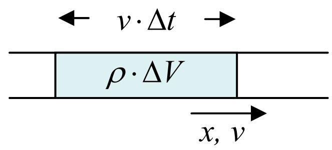
Ein dünner Draht wird durch eine Bahnkurve $\vec{l} = \vec{l}(s)$ mit s als Bahnparameter beschrieben. Der Strom I fließt durch den Draht.
Der Tangentenvektor $d\vec{l}/dl$ zeige in Richtung des Stroms.
Δf ist die Querschnittsfläche des Drahtes

Dann ist die Stromdichte definiert als: $\vec{j} = \dfrac{I}{\Delta f}\dfrac{d\vec{l}}{dl}$

Zusammenhang zwischen Stromdichte, Ladungsdichte und Geschwindigkeit:

Wir betrachten kontinuierlich verteilte Ladungen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit in x-Richtung bewegen. Im Zeitintervall bewegt sich eine bestimmte Ladung vom Ort $x = x_0$ zu $x = x_0 + \Delta x$ mit $\Delta x = v_x \Delta t$. Dabei werden die im Volumen $\Delta V = F\Delta x$ enthaltenen Ladungen durch die Fläche F transportiert.

$$\Delta q = \rho \cdot \Delta V \quad ; \quad \frac{\Delta q}{\Delta t} = I = \rho \frac{\Delta V}{\Delta t}$$



$$I = \rho \frac{F\,\Delta x}{\Delta t} = \rho \cdot F \cdot v_x$$

$$j_x = \frac{I}{F} = \rho \cdot v_x$$

allgemein: $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$. (2.81)

Mikroskopische, klassische Behandlung (at – atomar)

Betrachten Punktladung q_i mit Ortsvektor $\vec{r}_i$ und Geschwindigkeit $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i(t)$

Das ergibt die Ladungsdichte $\rho_{\text{at}}(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$ (2.82)

und die Stromdichte $\vec{j}_{\text{at}}(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i \cdot \vec{v}_i \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$ (2.83)

Im endlichen Volumen ΔV gibt es viele Ladungen und somit eine mittlere Ladungs- und Stromdichte:

$$\rho(\vec{r},t) = \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N} q_i \quad \text{und} \quad \vec{j}(\vec{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N} q_i \vec{v}_i$$

Sind alle Ladungen gleich, $q_i = q$, dann

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \frac{q}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i = \frac{\Delta q}{\Delta N}\frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i = \rho(\vec{r},t)\cdot\vec{v}(\vec{r},t) \tag{2.84}$$

mit Δq und ΔN Summe und Anzahl der Ladungen in ΔV

Handelt es sich um Elektronen, dann gilt:

$\vec{j} = e \cdot n \cdot \vec{v}$, $\quad$ n: Teilchendichte. (2.85)

Ein äußeres Feld übt eine Kraft auf die in einem Leiter frei beweglichen Ladungen aus. Die Bewegungsgleichung der Ladungen lautet dann:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \gamma\frac{d\vec{r}}{dt} = e\vec{E} \tag{2.86}$$

$\gamma\frac{d\vec{r}}{dt}$: Reibungskraft. Im stationären Zustand (d.h. konstante Bewegung) gilt $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0$ und somit

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{e}{\gamma}\vec{E} \ . \tag{2.87}$$

Für die Stromdichte gilt dann

$$\vec{j} = \rho\vec{v} = e \cdot n \cdot \frac{e}{\gamma}\vec{E}$$

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \quad ; \quad \sigma = \frac{e^2 n}{\gamma} \qquad \text{mit } \sigma\text{: elektrische Leitfähigkeit.} \tag{2.88}$$

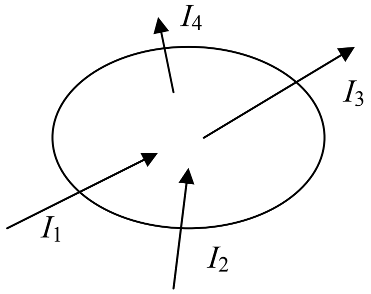
Anwendungen

Kontinuitätsgleichung im statischen Falle:

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{div}\vec{j} = 0$$

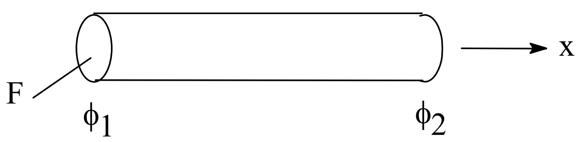
Dann gilt: $\int\limits_V \operatorname{div}\vec{j} \cdot dV = 0 = \oint\limits_f \vec{j}\,d\vec{f}$

→ Kirchhoff'sche Knotenregel $\quad -I_1 - I_2 + I_3 + I_4 = 0$



Ohmsches Gesetz:

Wir betrachten einen dünnen Leiter.



Konstante Potentialänderung entlang x.

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi \quad ; \quad E_x = E = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{l} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} = \frac{U}{l}$$

$$I = F \cdot j = F \cdot \sigma \cdot E = \sigma \cdot F \cdot \frac{U}{l} = \frac{U}{R}$$

$$I = \frac{U}{R} \qquad \text{mit } R = \frac{l}{\sigma \cdot F}$$

Der Widerstand R wächst mit der Länge l des Drahtes und sinkt mit zunehmender Fläche F und zunehmender Leitfähigkeit σ.