GEOMETRIE

Große Wackelpolyeder

Wenn man es geschickt anstellt, gewinnen Zusammensetzungen aus biederen gleichseitigen Dreiecken eine ungeahnte Beweglichkeit.

Von Christoph Pöppe

CHRISTOPH PÖPPE

Eva Wohlleben bewegt einen Zwölferring aus Korpuskeln, in dem die Dreiecke durch Metallstangen realisiert sind.

Eva Wohlleben, Künstlerin aus Berlin, hat einen Baukasten besonderer Art entworfen. Seine Bausteine sind in sich beweglich und bleiben es im Prinzip auch, wenn man sie zu größeren Einheiten zusammenfügt. Obendrein erfreuen sie jeden Freund der klassischen Geometrie, denn sie bestehen ausschließlich aus sehr elementaren Formen: gleichseitigen Dreiecken.

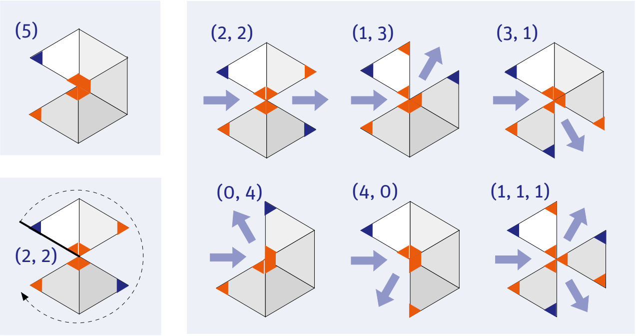
Allerdings darf man als geometrischer Purist nicht zu genau hinschauen. Was aus Papier oder Gestänge (Bild rechts) gebaut so eindrucksvoll deformierbar ist, existiert in der idealen Welt der reinen Formen gar nicht oder ist zumindest nicht beweglich. Vielleicht liegt es daran, dass sich Eva Wohllebens Werke der mathematischen Analyse so hartnäckig widersetzen.

Das Grundelement der Konstruktion, das »Korpuskel«, geht auf einen geometrischen Körper zurück, der nach seinem Erfinder Michael Goldberg »Goldberg-Ikosaeder« oder auch schlicht »Blasebalg« heißt. Man nehme eine fünfseitige Pyramide, deren Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind. Aus einem gewöhnlichen (platonischen) Ikosaeder ist sie bequem zu gewinnen, indem man die fünf Dreiecke, die einem beliebigen Eckpunkt anliegen, gemeinsam abschneidet.

Zwei solcher Pyramiden setze man Grundfläche auf Grundfläche aneinander und erhält eine Doppelpyramide. Fassen wir in Gedanken je zwei Dreiecke, die eine Bodenkante gemeinsam haben, zu einem »Segment« zusammen: einem Doppeldreieck, das von Spitze zu Spitze reicht. Man schlitze nun die Doppelpyramide von Spitze zu Spitze und trenne damit die Verbindung zweier benachbarter Segmente. Dadurch wird die bisher starre Struktur beweglich; sowie man die beiden Pyramidenspitzen gegeneinander bewegt, öffnet sich ein Schnabel (Bild unten, links). Ist dieser so weit aufgerissen wie nur möglich, liegt die ganze Struktur in einer Ebene. Der Öffnungswinkel des Schnabels beträgt 60 Grad; denn ein sechstes gleichseitiges Dreieck in der Runde würde die Figur wieder schließen. In seiner Urform mit geschlossenem Schnabel hat das Gebilde maximales Volumen.

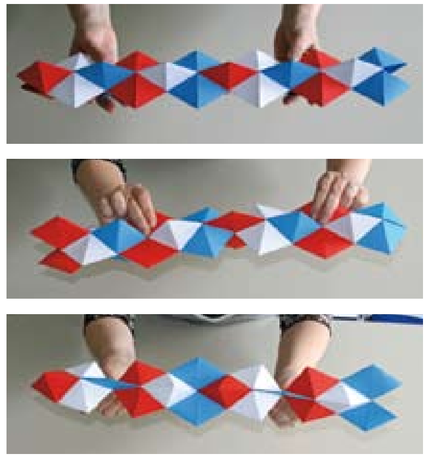
Das Goldberg-Ikosaeder entsteht nun dadurch, dass man zwei geschlitzte Doppelpyramiden mit den Schnäbeln derart aneinanderfügt, dass die Spitzen des einen Schnabels die Mundwinkel des anderen treffen, wie bei einem intensiven

SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT, CHRISTOPH PÖPPE



WOLFRAM LIEBERMEISTER

Die geschlitzte fünfseitige Doppelpyramide (oben, *a*) öffnet ihren Schnabel (*b*), bis sie bei einem Winkel von 60 Grad plattliegt (*c*). Herausschneiden von Segmenten (rechts) eröffnet zusätzliche Schnäbel, an denen weitere Elemente angefügt werden können, und zwar so, dass die Farbkennungen in den Treffpunkten übereinstimmen.



In der geraden Kette aus Korpuskeln des Typs (2, 2) hat jedes dritte Element (gleiche Farben) ungefähr den gleichen Öffnungszustand zwischen platt und dick.

Zungenkuss. Überraschenderweise bleibt die Gesamtkonstruktion beweglich. Öffnet sich der eine Schnabel, schließt sich zugleich der andere.

Das funktioniert allerdings nur, weil das Papier, aus dem das ganze Ding gefertigt ist, ein bisschen nachgibt. Mit gänzlich starren Dreiecken wäre das Gebilde unbeweglich. Genauer gesagt: Ein ideales, aus genau gleichseitigen Dreiecken bestehendes Goldberg-Ikosaeder gibt es nur in drei verschiedenen Positionen. Aus diesen »Gleichgewichtsstellungen« muss man das reale, deformierbare Objekt mit leichtem Druck herausbefördern, wenn es sich bewegen soll.

Wäre das Gebilde in jeder Position nicht nur ungefähr, sondern exakt mit gleichseitigen Dreiecken realisierbar, dann müsste sein Gesamtvolumen erhalten bleiben (Spektrum der Wissenschaft 6/1999, S. 110). Das ist nicht der Fall, wie man leicht nachprüfen kann. Man schneide in eines der Dreiecke ein kleines Loch und blase (Zigaretten-)Rauch ins Innere des Körpers. Bewegt man ihn, so stößt er kleine Rauchwölkchen aus, eben wie ein Blasebalg, was beweist, dass sich – in gewissen Stadien der Bewegung – sein Volumen verringert.

Der Name Goldberg-Ikosaeder ist übrigens korrekt. Durch Nachzählen bestätigt man, dass der Körper von genau 20 Dreiecken begrenzt ist. Nichts anderes sagt das Wort Ikosaeder (»Zwanzigflächner«), auch wenn Goldbergs Körper keine Ähnlichkeit zu einem platonischen Ikosaeder erkennen lässt.

Korpuskelketten

Eva Wohllebens Grundidee besteht nun darin, dem Goldberg-Ikosaeder neue Schnäbel zu eröffnen. Dazu schneidet sie ein Segment aus dem Fünferring aus, so dass von den ursprünglich fünf Dreieckspaaren noch vier übrig bleiben. Diese können sich zum Beispiel aufteilen in zwei und zwei, so dass die beiden Schnäbel einander gegenüberstehen, oder drei und eines, wodurch die Schnäbel gegeneinander angewinkelt sind (Bild S. 69 unten rechts). Die verschiedenen Anordnungen werden mit (2, 2), (3, 1) und so weiter bezeichnet. Ein solches Element mit mehreren Schnäbeln nennt Eva Wohlleben ein Korpuskel.

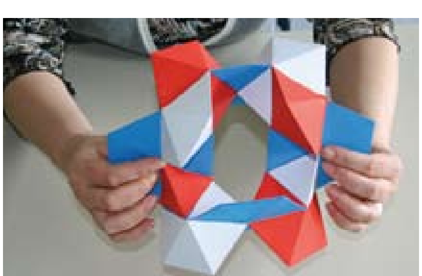
Korpuskel kann man zu beliebig langen Ketten zusammenfügen: gerade, geknickt, zur Schraubenlinie gewunden, zum Ring geschlossen oder in noch merkwürdigeren Formen angeordnet. Sogar die Anordnung (1, 1, 1) mit drei Schnäbeln ist möglich und erlaubt die Konstruktion verzweigter Ketten.

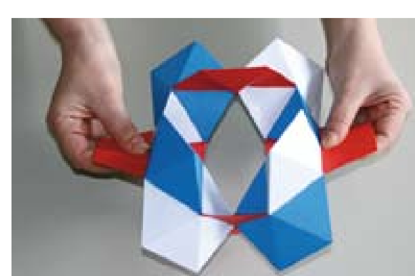
Auch innerhalb von Ketten bleiben Korpuskel beweglich. Durch das Eröffnen des zweiten Schnabels gewinnt das Objekt sogar so viel Bewegungsfreiheit, dass es mit geometrisch exakten Dreiecken realisierbar wäre.

Öffnet sich ein Schnabel eines Korpuskels, so wird der mit ihm schnäbelnde Partner dicker, denn was dem einen Korpuskel die Schnabelöffnung ist, das ist dem anderen die Höhe, das heißt der Abstand der Pyramidenspitzen. Macht das eine Korpuskel seinen Schnabel zu, so wird das andere platt. Je mehr ein Korpuskel an Höhe – und damit an Volumen – zulegt, desto geringer wird sein Umfang und damit in der Tendenz die Öffnung seiner Schnäbel. Ganz so zwangsläufig wie beim Goldberg-Ikosaeder ist die Mechanik nicht; vielmehr müssen sich die zwei – oder drei – Schnäbel eines Korpuskels den Winkel teilen, den die übrigen Segmente an den 360 Grad noch übrig lassen; und das wird umso weniger, je größer die Höhe ist.

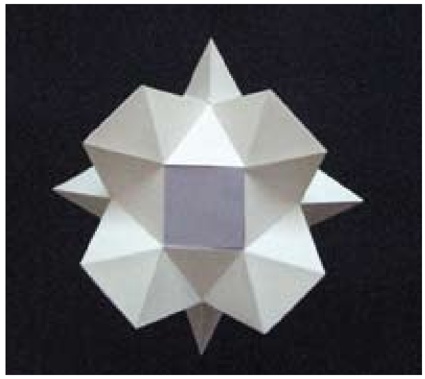
Dennoch hat eine Korpuskelkette nur einen Freiheitsgrad der Bewegung. Wackelt man an dem einen Ende, so gehen alle Glieder der Kette mit. In der Extremposition folgt auf ein dickes Korpuskel ein plattes, darauf wieder ein

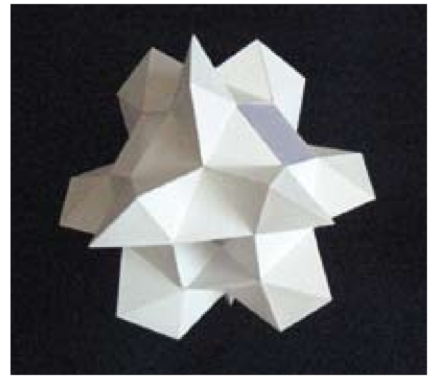
Korpuskelringe: Der sehr enge Sechserring aus (4, 0) und (2, 2) im Wechsel (links) ist auf seltsame Weise beweglich: Die (2, 2)-Teile knicken ein. Der Zwölferring aus (3, 1) und (2, 2) im Wechsel (rechts) ist starr, der Zwölferring aus lauter (3, 1) dagegen beweglich. Wieder nimmt jedes dritte Element die gleiche Form an (unten).





FOTOS DIESER SEITE: SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT, CHRISTOPH PÖPPE





EVA WOHLLEBEN

Der Korpuskelball hat die Symmetrieeigenschaften eines Würfels: (1, 1, 1) an den Ecken sind durch (3, 1) an den Kanten verbunden. Zur Verdeutlichung der Symmetrie ist das quadratische Loch in der Mittte von einem blassblauen Quadrat bedeckt, das eine Würfelfläche vertritt.

dickes, ein plattes und so weiter – sollte man meinen.

Die erste Überraschung ist: Das stimmt nicht. Die Form der Korpuskel wiederholt sich nicht nach zwei, sondern nach drei Kettengliedern, zum Beispiel platt, dick, dick, platt, dick, dick … (Bild links oben). Daraus folgt insbesondere, dass ein geschlossener Ring aus acht Korpuskeln starr ist. Denn das erste, vierte, siebte, zehnte … Glied des Rings müssten jeweils dieselbe Form annehmen; wegen der Ringstruktur ist aber das zehnte Glied dasselbe wie das zweite, womit im Endeffekt alle Glieder dieselbe Form haben müssen. Dagegen ist ein Zwölferring aus (3, 1)-Korpuskeln ebenso beweglich wie der Sechserring, ein merkwürdig verknotetes Gebilde aus je drei Korpuskeln vom Typ (4, 0) und vom Typ (2, 2) (Bild links unten).

Allerdings sind diese geschlossenen Figuren mit idealen Dreiecken nicht mehr beweglich. Vielmehr gibt es ebenso wie beim Goldberg-Ikosaeder nur einige wenige exakt realisierbare Konformationen. Will man von einer zur anderen wechseln, muss man das Material ein bisschen strapazieren.

Ein Zwölferring aus Elementen der Form (3, 1) und (2, 2) im Wechsel ist starr. Allem Anschein nach muss man, um überhaupt den Ring schließen zu können, das Material schon so stark deformieren, dass für weitere Beweglichkeiten kein Platz mehr bleibt.

Aber wie ist nun die Erklärung für diese unerwartete Dreierperiode? Die zweite Überraschung ist: Es gibt keine. Man kann versuchen, die Geometrie der Korpuskelketten durchzurechnen. Wolfram Liebermeister vom Max-Planck-Institut für molekulare Genetik in Berlin hat das getan; ich selbst habe die Berechnungen noch etwas weitergetrieben. Das Ergebnis ist: Auch das mit der Dreierperiode stimmt nur so ungefähr. Es gibt eine Stellung der Kette, bei der jedes dritte Korpuskel wieder dieselbe Form annimmt. Das ist aber leider die, in der sowieso alle Korpuskel gleich aussehen. Eine weitere Stellung ist ebenfalls exakt und folgt dem Muster platt, dick, dick; allerdings ist es nicht möglich, für deren geometrische Daten eine geschlossene Formel anzugeben.

Wohltemperierte Geometrie

Mag der Purist beklagen, dass die Seitenlängen nicht genau stimmen und etwas gezerrt werden müssen. Das ist ungefähr so traurig wie die Tatsache, dass ein Klavier – außer der Oktave – keine reinen Intervalle realisiert. Die Künstler nehmen den Schmutz der temperierten Stimmung in Kauf, weil sich dadurch neue Gestaltungsmöglichkeiten eröffnen. Ähnlich erlauben auch die »unsauberen« Korpuskel etliche Konstruktionen, die es eigentlich nicht geben dürfte.

Interessant sind zum Beispiel die verzweigten Ketten, die das Element (1, 1, 1) ermöglicht. Man setze acht solcher dreischnäbliger Korpuskel in die Eckpunkte eines Würfels. So wie im Würfel von jeder Ecke drei Kanten ausgehen, so sollen die drei Schnäbel Anschluss an entsprechende Elemente finden. Die Kanten im Würfel stehen senkrecht aufeinander, was die Schnäbel nun nicht gerade tun; aber das schadet nichts. Ein Element (3, 1), mit den drei Dreieckspaaren nach außen zwischen die Eckstücke gesetzt, steuert die fehlenden Winkel bei. Damit sitzt überall da, wo ein Würfel eine Seitenfläche hat, ein (starrer) Achterring aus Korpuskeln, und alles passt zusammen (Bild oben).

Würfel kann man im Raum stapeln; das geht mit den Korpuskelwürfeln nicht, weil bei ihnen ein Unterschied zwischen Innen- und Außenseite einer Kante besteht. Gleichwohl sind unendlich ausgedehnte Korpuskelkonstruktionen denkbar. Als Vorbild dafür eignen sich weniger die Würfelpackungen, sondern eher die ebenfalls raumfüllenden Packungen aus Oktaederstümpfen.

Auf das Material Papier kommt es übrigens nicht an. Eva Wohlleben hat Korpuskelketten aus vielen anderen Materialien konstruiert. Das ist das Angenehme am gleichseitigen Dreieck: Es ist durch seine drei – gleichen – Seitenlängen bereits vollständig bestimmt. Es genügt daher, wenn bei einer Korpuskelkonstruktion die Kanten in Form von Stangen ausgeführt sind. Die müssen dann noch an ihren Enden flexibel miteinander verbunden werden.

Just zu diesem Zweck hat Eva Wohlleben das von Rico Scharndke erfundene System »Twistix« weiterentwickelt: Hölzerne Stäbe tragen an den Enden schraubenförmig gewundene Drähte, die man ineinanderhaken kann.

Vielleicht werden alle diese Polyeder ja besser beweglich, wenn man nicht mehr darauf besteht, dass die Dreiecke gleichseitig sein müssen? Nicht nur Michael Goldberg selbst, auch andere Leute sind auf diese Idee gekommen. Das Goldberg-Ikosaeder läuft deutlich glatter, wenn man die zur Spitze führenden Kanten der Doppelpyramide um 2 Prozent länger macht als die Bodenkanten. Dieter Junker aus Kassel hat darüber hinaus beim beweglichen Zwölferring die Bodenkante des alleinstehenden Segments (der »Eins« in der Kombination (3, 1) um fast 15 Prozent kürzer gemacht als die Spitzenkante. Man merkt beim Bewegen, dass man das Material viel weniger quälen muss; aber einen mathematischen Beweis gibt es auch hier nicht. ◁

Christoph Pöppe ist Redakteur bei »Spektrum der Wissenschaft«.

Goldberg, M.: Unstable Polyhedral Structures. In: Mathematics Magazine 51(3), S. 165 – 170, 1978.

Weblinks zu diesem Thema finden Sie unter www.spektrum.de/artikel/994063.