Etwas Vektoranalysis

Funktionen, die im gesamten Raum definiert sind, die also von den drei Ortskoordinaten x_1, x_2 und x_3 abhängen, heißen *Felder*. Je nach dem, ob die Funktionswerte Zahlen oder Vektoren sind, sprechen wir von *skalaren Feldern* oder *Vektorfeldern*.
Ein Feld, welches uns in der Elektrodynamik immer wieder begegnen wird, ist die Funktion

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \left(\sum_j (x_j - x_j')^2\right)^{-1/2}.$$

Die ersten Ableitungen lauten

$$\partial_i \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{1}{2}\left(\sum_j (x_j - x_j')^2\right)^{-3/2} \cdot 2(x_i - x_i') = -\frac{(x_i - x_i')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}. \tag{1}$$

Allgemein lässt sich zeigen, dass

$$\partial_i \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^n} = -n \cdot \frac{x_i - x_i'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^{n+2}}.$$

Damit ergibt sich für die zweiten Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\partial_i \partial_j \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= -\partial_i \frac{(x_j - x_j')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -(x_j - x_j')\partial_i \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\partial_i (x_j - x_j') \qquad (2)\\
&= \frac{3(x_i - x_i')(x_j - x_j')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^5} - \frac{\delta_{ij}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}.
\end{aligned}$$

Aus diesen Ergebnissen folgt sofort, dass

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\begin{pmatrix} x_1 - x_1' \\ x_2 - x_2' \\ x_3 - x_3' \end{pmatrix} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

und

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \partial_i \partial_i \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{3(x_i - x_i')^2}{|\vec{r}-\vec{r}'|^5} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right) = 0 \quad \text{für } \vec{r} \neq \vec{r}'.$$

Taylorentwicklung

Die Taylorentwicklung einer Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um den Punkt $\vec{r}$ lautet in Vektorschreibweise:

$$f(\vec{r}+\vec{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\vec{a}\cdot\nabla)^n f(\vec{r}) = f(\vec{r}) + \vec{a}\cdot\nabla f(\vec{r}) + \frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\nabla)^2 f(\vec{r}) + \dots .$$

In kartesischen Koordinaten sind

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\nabla f(\vec{r}) &= \sum_i a_i \partial_i f(\vec{r}) \\ \text{und} \quad \tfrac{1}{2}(\vec{a}\cdot\nabla)^2 f(\vec{r}) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_i a_j \partial_i \partial_j f(\vec{r}) \end{aligned}$$

die gewohnten Ausdrücke für die ersten zwei Glieder der Taylorentwicklung.
Mit den Ausdrücken (1) und (2) können wir die ersten beiden Glieder der Taylorentwicklung von $1/|\vec{r}-\vec{r}'-\vec{a}|$ un den Punkt $\vec{r}-\vec{r}'$ bestimmen. Hierzu schreiben wir

$$\begin{aligned} (\vec{a}\cdot\nabla)^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'-\vec{a}|} &= \sum_{i,j} a_i a_j \left(\frac{3(x_i - x_i')(x_j - x_j')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^5} - \frac{\delta_{ij}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right) \\ &= \frac{3\cdot(\vec{a}\cdot(\vec{r}-\vec{r}'))^2}{|\vec{r}-\vec{r}'|^5} - \frac{\vec{a}^2}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'-\vec{a}|} = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \vec{a}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{2}\frac{3\cdot(\vec{a}\cdot(\vec{r}-\vec{r}'))^2 - \vec{a}^2(\vec{r}-\vec{r}')^2}{|\vec{r}-\vec{r}'|^5} + \dots .$$

Für $\vec{r}' = 0$ vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{a}}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{a})^2 - r^2 a^2}{r^5} + \dots .$$