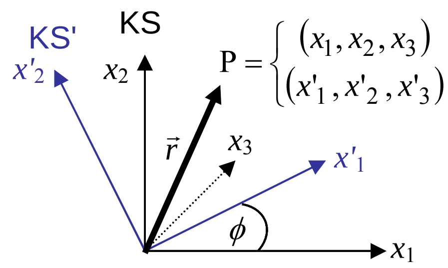
5 Lorentztransformation

Ziel/Hintergrund: Betrachtung von Ereignissen in verschiedenen Inertialsystemen, die sich relativ zueinander mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegen. Gültigkeit der Maxwellgleichungen in solchen Inertialsystemen und Vereinfachung der Maxwellgleichungen.

5.1 Orthogonale Transformation

Eine orthogonale Transformation vermittelt zwischen verschiedenen kartesischen Koordinatensystemen:



Der Massenpunkt P hat unterschiedliche Koordinatenwerte in den verschiedenen KS; diese sind durch die orthogonale Transformation miteinander verknüpft.

$$x'_j = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ji} x_i \tag{5.1}$$

mit

$$\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ji} \alpha_{jk} = \delta_{ik} \qquad \text{(Orthogonalität)} \tag{5.2}$$

mit Kroneckersymbol $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad i = k \\ 0 & \textit{für} \quad i \neq k \end{cases}$ (5.3)

Andere Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{x}' = \alpha\, \vec{x} \qquad (5.4) \qquad \text{mit } \alpha^T \alpha = 1 \qquad (5.5)$$

Die Matrix α ist orthogonal und die Transformation heißt orthogonal. Für die obige Abbildung einer Drehung um die x_3-Achse mit Drehwinkel ϕ ist

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

(Aus $\alpha^T \alpha = 1$ folgt, dass die Spalten- und Zeilenvektoren jeweils orthonormiert sind; leicht überprüfbar für das gegebene Beispiel.)

Tensordefinition

Definition: Ein Tensor N-ter Stufe ist eine N-fach indizierte Größe $\boldsymbol{T}_{i_1 i_2 \ldots i_N}$, die sich komponentenweise so transformiert wie der Ortsvektor, also

$$\boldsymbol{T}'_{i_1 \ldots i_N} = \sum_{j_1=1}^{3} \ldots \sum_{j_N=1}^{3} \alpha_{i_1 j_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i_N j_N} \, \boldsymbol{T}_{i_1 \ldots i_N} \qquad \text{(Tensor)} \tag{5.7}$$

Tensor nullter Stufe – Skalar
Tensor erster Stufe – Vektor

Das Kroneckersymbol ist durch Zahlenzuweisung unabhängig vom KS definiert; in jedem KS' gilt ebenfalls $\delta'_{ik} = \delta_{ik}$. Das erfüllt die Definition eines Tensors:

$$\delta'_{ik} = \sum_{n=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} \alpha_{in} \alpha_{kl} \delta_{nl} = \sum_{n=1}^{3} \alpha_{in} \alpha_{kn} = \delta_{ik} \tag{5.8}$$

Das Kroneckersymbol wird auch als Einheitstensor bezeichnet; die Matrix (δ_{ik}) ist die Einheitsmatrix.

Kovarianz (unter Transformation)

Tensoren wurden durch ihr Verhalten unter orthogonaler Transformation definiert (hier in Bezug auf kartesische Koordinatensysteme).
Aus der Definition folgt, dass Tensorgleichungen ***kovariant***, das bedeutet ***forminvariant***, unter orthogonaler Transformation sind.

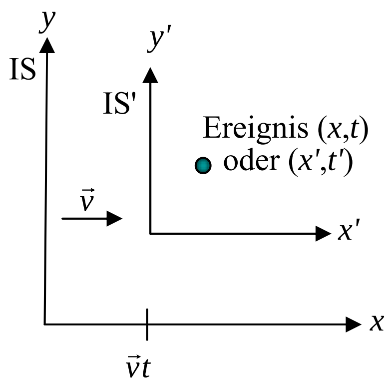
Beispiel: Gleichung $V_i = \sum_{j=1}^{3} S_{ij} W_j \quad \text{bzw.} \quad V = SW$ (5.9)

Multiplizieren von links mit α, auf rechter Seite einfügen von $\alpha^T \alpha = 1$ ergibt

$$\alpha V = \alpha SW = \alpha S \alpha^T \alpha W \,, \quad \text{also} \quad V' = S'W' \quad \text{oder} \quad V_i' = \sum_{j=1}^{3} S_{ij}' W_j' \,. \tag{5.10}$$

Diese Gleichung in KS' ist von der gleichen Form wie in KS; daher forminvariant.

5.2 Die Lorentztransformation



Ein Ereignis hat verschiedene Koordinaten in den verschiedenen Intertialsystemen IS und IS'. Die Koordinatenwerte sind durch die Lorentztransformation miteinander verknüpft.

Die orthogonale Transformation vermittelt zwischen verschiedenen kartesischen Koordinatensystemen; die Lorentztransformation vermittelt zwischen verschiedenen Inertialsystemen.

Das IS habe drei kartesische Raumkoordinaten *x*, *y* und *z* und eine Zeitkoordinate *t* (für eine in IS ruhende Uhr).

Die Raum-Zeit-Koordinaten werden mit x^α bezeichnet:

$$\left(x^\alpha\right)=\left(x^0,x^1,x^2,x^3\right)=\left(ct,x,y,z\right) \qquad \text{mit } c-\text{Lichtgeschwindigkeit} \tag{5.11}$$

Die Angabe von bestimmten Werten der Raum-Zeit-Koordinaten definiert ein Ereignis. Ein solches Ereignis habe in IS die Koordinatenwerte x^α und in IS' die Werte x'^α. Die Lorentztransformation zwischen diesen Koordinatenwerten ist linear:

$$x'^\alpha=\Lambda^\alpha_\beta x^\beta+b^\alpha \qquad \text{Lorentztransformation} \tag{5.12}$$

Als Summenkonvention wird vereinbart, dass über gleiche Indices, von denen einer oben und der andere unten steht, summiert wird; das Summenzeichen wird nicht mitgeschrieben.

Die Bedingung für die Festlegung der Koeffizienten Λ^α_β ist die Invarianz des vierdimensionalen Abstandes zwischen zwei Ereignissen und lautet hier:

$$\Lambda^T\eta\Lambda=\eta \tag{5.13}$$

$$\text{mit } \eta=\left(\eta_{\alpha\beta}\right)=\left(\eta^{\alpha\beta}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \qquad \eta-\text{Minkowskitensor} \tag{5.14}$$

(Analogie zu $\alpha^T\alpha=1$)

5.2.1 Definition des Lorentztensors

Ein Lorentztensor 1. Stufe ist jede einfach indizierte Größe V^α, die sich wie die Koordinaten x^α transformiert:

$$V'^\beta=\Lambda^\beta_\alpha V^\alpha\,. \tag{5.15}$$

Beispiele für Lorentztensoren sind dx^{α} und die 4-Geschwindigkeit $u^{\alpha} = c\dfrac{dx^{\alpha}}{ds}$.

Ein Lorentztensor N-ter Stufe ist eine N-fach indizierte Größe, die sich wie

$$\boldsymbol{T}'^{\alpha_1 \dots \alpha_N} = \Lambda^{\alpha_1}_{\beta_1} \dots \Lambda^{\alpha_N}_{\beta_N} \boldsymbol{T}^{\beta_1 \dots \beta_N} \tag{5.16}$$

transformiert. Übliche Bezeichnungen: Vierertensor, 4-Tensor.

Das Hochstellen der Indices ist eine willkürliche (aber bedeutsame) Festlegung. Jedem Vektor V^{α} wird durch

$$V_{\beta} = \eta_{\beta\alpha} V^{\alpha} \tag{5.17}$$

ein Vektor zugeordnet, bei dem die Indices unten stehen. Umkehrung: $V^{\gamma} = \eta^{\gamma\beta} V_{\beta}$.

Für die Koordinaten gilt dann: $(x_{\alpha}) = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z)$ (5.18)

Die Indices oben und unten führen zu einer vereinfachten Schreibweise, z. B.

$$ds^2 = dx_{\alpha} dx^{\alpha} \qquad \text{(hier wohl noch nicht sichtbar)} \tag{5.19}$$

Entsprechend gilt für die Tensoren:

$$T_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\alpha'} \eta_{\beta\beta'} T^{\alpha'\beta'} \qquad T^{\alpha}{}_{\beta} = \eta_{\beta\beta'} T^{\alpha\beta'} \qquad T_{\alpha}{}^{\beta} = \eta_{\alpha\alpha'} T^{\alpha'\beta} \tag{5.20}$$

Bezeichnungen

$T^{\alpha\beta\dots}$ – kontravariante Komponenten des Tensors (Indices stehen oben)
$V_{\alpha\beta\dots}$ – kovariante Komponenten des Tensors (Indices stehen unten)

$T^{\alpha}{}_{\beta}$ – gemischte Komponenten (Reihenfolge der Indices nicht vertauschen!)

Transformation der kovarianten Tensoren:

$$V'_\alpha = \eta_{\alpha\beta} V'^\beta = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\gamma V^\gamma = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\gamma \eta^{\gamma\delta} V_\delta = \overline{\Lambda}^\delta_\alpha V_\delta \,. \qquad (5.21)$$

Hier haben wir die Matrix $\overline{\Lambda}^\delta_\alpha = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\gamma \eta^{\gamma\delta}$ eingeführt. (5.22)

Multiplizieren mit $\Lambda^\alpha_\varepsilon$:

$$\overline{\Lambda}^\delta_\alpha \Lambda^\alpha_\varepsilon = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\gamma \eta^{\gamma\delta} \Lambda^\alpha_\varepsilon = \eta^{\gamma\delta} \eta_{\gamma\varepsilon} = \delta^\delta_\varepsilon \,. \qquad (5.23)$$

Entsprechend gilt: $\Lambda^\delta_\alpha \overline{\Lambda}^\alpha_\varepsilon = \delta^\delta_\varepsilon$ (5.24)

Damit folgen die Rücktransformationen

$$V^\gamma = \delta^\gamma_\beta V^\beta = \overline{\Lambda}^\gamma_\alpha \Lambda^\alpha_\beta V^\beta = \overline{\Lambda}^\gamma_\alpha V'^\alpha \qquad (5.25)$$

$$V_\gamma = \delta^\gamma_\beta V_\beta = \overline{\Lambda}^\beta_\alpha \Lambda^\alpha_\gamma V_\beta = \Lambda^\alpha_\gamma V'_\alpha \,. \qquad (5.26)$$

Zusammenfassung: kontravariante Vektoren werden mit Λ^α_β, kovariante mit $\overline{\Lambda}^\alpha_\beta$ transformiert. Die Rücktransformation wird durch die jeweils andere Größe vermittelt.

5.2.2 Rechenregeln für Lorentztensoren

Sind S und T Tensoren, dann gilt:

1. Addition: $aS^{\alpha_1 \dots \alpha_N} + bT^{\alpha_1 \dots \alpha_N}$ ist ein Tensor der Stufe N. a, b sind Zahlen.
2. Multiplikation: $S^{\alpha_1 \dots \alpha_N} T^{\beta_1 \dots \beta_M}$ ist ein Tensor der Stufe $N + M$.
3. Kontraktion: $\eta_{\beta\gamma} S^{\alpha_1 \dots \beta \dots \gamma \dots \alpha_N} = S^{\alpha_1 \dots \beta \dots}{}_{\beta}{}^{\dots \alpha_N}$ ist ein Tensor der $(N-2)$-ten Stufe.

   Insbesondere sind $ds^2 = dx^\alpha dx_\alpha$ und $S^\alpha T_\alpha$ Lorentzskalare.

4. Tensorgleichungen: Gilt $S^{\alpha} = U^{\alpha\beta} T_{\beta}$ in jedem IS, dann ist $U^{\alpha\beta}$ ein Tensor zweiter Stufe.

5.2.3 Tensorfelder

Erweiterung der Tensordefinition auf Felder: Die Funktionen $S(x)$, $V^{\alpha}(x)$ und $T^{\alpha\beta}(x)$ sind jeweils ein Skalarfeld, Vektorfeld oder Tensorfeld, falls:

$$S'(x') = S(x) \tag{5.27}$$

$$V'^{\alpha}(x') = \Lambda^{\alpha}_{\beta} V^{\beta}(x) \tag{5.28}$$

$$T'^{\alpha\beta}(x') = \Lambda^{\alpha}_{\gamma} \Lambda^{\beta}_{\delta} T^{\gamma\delta}(x) \tag{5.29}$$

Hierbei sind die Argumente mitzutransformieren, also $x' = \left(x'^{\alpha}\right) = \left(\Lambda^{\alpha}_{\beta} x^{\beta}\right)$. (5.30)

Tensorfelder können nach den Argumenten abgeleitet werden:

$$\partial_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}, \quad \partial^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}. \tag{5.31}$$

Aus $V^{\gamma} = \overline{\Lambda}^{\gamma}_{\alpha} V'^{\alpha}$ (5.25) folgt $\dfrac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} = \overline{\Lambda}^{\beta}_{\alpha}$ und damit

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} = \overline{\Lambda}^{\beta}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}. \tag{5.32}$$

Also transformiert sich $\dfrac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$ mit $\overline{\Lambda}^{\alpha}_{\beta}$ und ist daher ein kovarianter Vektor.

Entsprechend transformiert sich $\dfrac{\partial}{\partial x_{\alpha}}$ wie ein kontravarianter Vektor.

Wir können den d'Alembert-Operator (oder Viereck-Operator) definieren:

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\,. \tag{5.33}$$

Aus den Vektoreigenschaften von ∂_α und ∂^α folgt, dass der d'Alembert-Operator ein Lorentzskalar ist:

$$\Box = \partial^\alpha \partial_\alpha = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\,. \tag{5.34}$$

5.3 Kovarianz

Die Maxwellgleichungen gelten in allen Inertialsystemen. Formal bedeutet dies, dass sich ihre Form durch die Lorentztransformation nicht ändert: Sie sind forminvariant oder kovariant. Dies wird durch eine kovariante Schreibweise zum Ausdruck gebracht.

Unter dem Relativitätsprinzip versteht man die Aussage, dass alle Inertialsysteme gleichwertig sind, das heißt, dass die grundlegenden Gesetze in allen IS die gleiche Form haben. Das Relativitätsprinzip wurde ursprünglich von Galilei aufgestellt.
Bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts wurde die Galileitransformation für den Übergang zwischen verschiedenen IS benutzt. Sie impliziert, dass sich das Licht in verschiedenen IS unterschiedlich schnell bewegt. Wenn sich Licht in IS' mit Geschwindigkeit *c* fortpflanzt, dann gilt mit Galileitransformation:

$$\frac{dx'}{dt'} = c \qquad \xrightarrow[\textit{Galileitransformation}]{x = x' + vt',\quad t = t'} \qquad \frac{dx}{dt} = c + v \tag{5.35}$$

Licht würde sich also in IS mit $c + v \neq c$ fortpflanzen.

Maxwellgleichungen haben Wellenlösungen, die sich mit *c* fortpflanzen. Nach dem Relativitätsprinzip von Galilei wären die Maxwellgleichungen nichtrelativistisch und nur in einem bestimmten IS gültig (glaubte auch Maxwell selbst).

Licht pflanzt sich jedoch in jedem IS mit gleicher Geschwindigkeit fort und

$$\boxed{\text{Maxwellgleichungen gelten in jedem IS.}} \tag{5.36}$$

Das *Einsteinsche Relativitätsprinzip* bedingt eine andere Transformation zwischen den IS. Es geht von der Invarianz von $c^2dt^2 - d\vec{r}^{\,2}$ aus, aus der die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit unmittelbar folgt:

$$\frac{dx'}{dt'} = c \qquad \underset{\text{Lorentztransformation}}{\overset{c^2dt'^2 - dx'^2 = c^2dt^2 - dx^2}{\rightarrow}} \qquad \frac{dx}{dt} = c \tag{5.37}$$

Die linearen Transformationen, die $c^2dt^2 - d\vec{r}^{\,2}$ invariant lassen, sind die Lorentztransformationen.

Das Relativitätsprinzip von Einstein ist die physikalische Grundlage der Speziellen Relativitätstheorie.

5.3.1 Lorentzinvarianz der Ladung

Es wird gezeigt, dass aus der Aussage „Maxwellgleichungen gelten in jedem IS“ (5.36) die Lorentzinvarianz der Ladung folgt. (Also: Die Ladung ist unabhängig von der Geschwindigkeit.)

Aus den Maxwellgleichungen folgte die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t) = 0\,. \tag{5.38}$$

Wir fassen wieder die Zeit- und Ortskoordinaten zu Lorentz- oder 4-Vektoren zusammen:

$$\left(x^\alpha\right) = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r}) \quad \text{und} \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\,. \tag{5.39}$$

Die zugehörigen kontra- und kovarianten Komponenten sind

$$\left(x_\alpha\right)=\left(x_0,x_1,x_2,x_3\right)=\left(ct,-x,-y,-z\right)=\left(ct,-\vec{r}\right) \quad \text{und} \quad \partial^\alpha=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}. \tag{5.40}$$

Wir führen die folgende vierfach indizierte Größe ein:

$$\left(j^\alpha\right)=\left(c\rho,j_x,j_y,j_z\right). \tag{5.41}$$

Dies ist zunächst eine Definition und noch keine Aussage über das Transformationsverhalten. Damit lässt sich die Kontinuitätsgleichung folgendermaßen schreiben:

$$\partial_\alpha j^\alpha(x)=0\,. \tag{5.42}$$

Erinnerung: Über zwei gleiche Indices, die je oben und unten stehen, wird summiert. Im Argument steht x für $(t,\vec{r})$ oder für $\left(x^0,x^1,x^2,x^3\right)$. Wegen „Maxwellgleichungen gelten in jedem IS“ gilt diese Beziehung auch in allen Inertialsystemen (die gestrichenen Größen beziehen sich auf ein beliebiges, relativ zu IS bewegtes IS'):

$$\partial'_\alpha j'^\alpha(x')=0\,. \tag{5.43}$$

Aus (5.42) und (5.43) folgt, dass $\partial_\alpha j^\alpha$ ein Lorentzskalar ist. Da ∂_α ein 4-Vektor ist, gilt für die Viererstromdichte j^α

$$j^\alpha(x) \text{ ist ein 4-Vektorfeld, also } j'^\alpha(x')=\Lambda^\alpha_\beta\, j^\beta(x). \tag{5.45}$$

Zur Diskussion dieser Transformation von j^α betrachten wir den Fall, dass es in IS nur eine Ladungsdichte ρ gibt, also

$$\left(j^\alpha\right)=\left(c\rho,0\right). \tag{5.46}$$

In einem relativ mit $\vec{v}$ bewegten IS' ist die Viererstromdichte dann

$$\left(j'^{\alpha}\right) = \Lambda(\vec{v})(c\rho, 0) = \gamma(c\rho, -\rho\vec{v}) = (c\rho', -\rho'\vec{v}), \tag{5.47}$$

wobei $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. (5.48)

Für die Ladungsdichte, also Ladung pro Volumen, gilt daher

$$\rho' = \frac{dq'}{dV'} = \gamma\rho = \gamma\frac{dq}{dV}. \tag{5.49}$$

Das betrachtete Volumenelement erleidet bei der Transformation in der Richtung von $\vec{v}$ eine Längenkontraktion, also

$$dV' = dV\sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{dV}{\gamma}. \tag{5.50}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt

$$dq = dq'. \tag{5.51}$$

Da dies für jedes Ladungselement gilt, ist die Ladung

$$q = \frac{1}{c}\int j^0(x)dV \qquad \text{ein Lorentzskalar.} \tag{5.52}$$

Die Lorentzinvarianz der Ladung bedeutet physikalisch, dass die Ladung eines Teilchens unabhängig von seiner Bewegung ist. Ein geladenes Teilchen, das sich mit $\vec{v}$ bewegt, ruht in einem IS', das sich mit $\vec{v}$ relativ zu IS bewegt. Die Ladung q des bewegten Teilchens ist immer gleich der Ruheladung q'. Die Größe der Ladung ist also unabhängig von der Geschwindigkeit.

Experimentell wird die Unabhängigkeit der Ladung von der Geschwindigkeit durch die Neutralität des Wasserstoffatoms verifiziert. Ein Proton und ein Elektron haben die Gesamtladung null und zwar unabhängig davon, ob die Teilchen ruhen oder nicht. Dies gilt z. B. nicht für die

Masse: Die Ruhemasse des Wasserstoffatoms ist nicht die Summe der Ruhemassen von Proton und Elektron.
Die Neutralität des Wasserstoffatoms wird mit großer Genauigkeit nachgewiesen: Gäbe es etwa Änderungen der Ladung von der Größe $O\left(v^2/c^2\right)$, so hätte ein Wasserstoffatom wegen $v_e \sim c/100$ eine Ladung von $|q| \sim 10^{-4} e$. Ein Mol Wasserstoff hätte dann die (riesige) Ladung von $Q \sim 6 \cdot 10^{19} e \sim 10\,\mathrm{C}$. Die Lorentzinvarianz ist eine Konsequenz aus „Maxwell gilt in jedem IS“.

5.3.2 Kovariante Maxwellgleichungen

Wir stellen nun die kovariante Form der Maxwellgleichungen auf, und zwar zunächst für die Potenziale. Dazu gehen wir von folgenden Gleichungen aus:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{dt^2}\right)\varphi(\vec{r},t) = -4\pi\rho(\vec{r},t) \tag{5.53}$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t) \tag{5.54}$$

Wir führen die folgende, vierfach indizierte Größe ein:

$$\left(A^\alpha\right) = \left(\varphi, A_x, A_y, A_z\right). \tag{5.55}$$

Wieder: Dies ist zunächst eine Definition, keine Aussage über das Transformationsverhalten.

Mit Verwendung des d'Alembert-Operators $\Box = \partial^\alpha \partial_\alpha = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ erhalten wir eine Darstellung der Gleichungen (5.53), (5.54) in der Form

$$\Box A^\alpha(x) = \frac{4\pi}{c} j^\alpha(x). \qquad \text{Kovariante Maxwellgleichungen für die Potenziale} \tag{5.56}$$

Die Maxwellgleichungen gelten in allen IS. Mit j^α muss daher auch die linke Seite $\Box A^\alpha(x)$ von Gl. (5.56) ein Lorentzvektor sein. Da der d'Alembert-Operator ein Lorentzskalar ist, folgt für das Viererpotenzial:

$$A^\alpha(x) \text{ ist ein 4-Vektorfeld.} \tag{5.57}$$

Damit ist $\partial_\alpha A^\alpha$ ein Lorentzskalar und die Lorenzeichung gilt ebenfalls in jedem IS:

$$\partial_\alpha A^\alpha(x) = 0\,. \tag{5.58}$$

Die Maxwellgleichungen zusammen mit der Lorenzeichung und die Kontinuitätsgleichung sind *kovariante Gleichungen*, das heißt, sie sind *forminvariant* unter Lorentztransformation. (Zur Erinnerung, es gab noch die Bedeutung kovariant – Indices unten, kontravariant – oben.)

Jetzt werden wir noch die kovariante Form der Maxwellgleichungen für die direkt messbaren Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aufstellen. Die Verbindung dieser Felder mit den Potenzialen war

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad \text{und} \quad B = \nabla\times\vec{A}\,. \tag{5.59}$$

Wir definieren den *antisymmetrischen Feldstärketensor* $F^{\alpha\beta}$ folgendermaßen:

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha\,. \tag{5.60}$$

Aus dieser Definition folgt sofort, dass $F^{\alpha\beta}$ invariant ist unter der Eichtransformation

$$A^\alpha \to A^\alpha - \partial^\alpha \Lambda\,. \tag{5.61}$$

Aus den Gleichungen (5.59) und (5.60) folgen die Komponenten des Feldstärketensors:

$$\left(F^{\alpha\beta}\right)=\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.62}$$

Dabei sind die Vorzeichen zu beachten: $\partial^i = \frac{\partial}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x^i} = -\nabla \cdot \vec{e}_i$.

Beim Übergang zum kovarianten Feldstärketensor $F_{\alpha\beta}$ bleiben die 00- und *ij*-Komponenten gleich, währen die 0*i*- und *i*0-Komponenten einen Vorzeichenwechsel erfahren:

$$\left(F_{\alpha\beta}\right)\overset{(5.20)}{=}\left(\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}F^{\gamma\delta}\right)=\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.63}$$

(Aus der Definition des Feldstärketensors (5.60) folgt, dass $F^{\alpha\beta}$ ein Lorentztensor zweiter Stufe ist. Aus dem bekannten Transformationsverhalten dieses Tensors lässt sich dasjenige von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ablesen.)

In Gleichung (5.56) fügen wir auf der linken Seite den Term

$$\partial_\beta \partial^\alpha A^\beta = \partial^\alpha \partial_\beta A^\beta = 0 \tag{5.64}$$

hinzu. Unter Berücksichtigung von $\Box = \partial_\beta \partial^\beta$ folgt dann

$$\partial_\beta\left(\partial^\beta A^\alpha - \partial^\alpha A^\beta\right) = \frac{4\pi}{c} j^\alpha . \tag{5.65}$$

Dies sind die vier inhomogenen Maxwellgleichungen für $F^{\alpha\beta}$ (5.60):

$$\partial_\beta F^{\beta\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha(x) \qquad \begin{cases} \alpha = 0, & \mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho \\ \alpha = i, & \mathrm{rot}\vec{B} - \frac{\dot{\vec{E}}}{c} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases} \tag{5.66}$$

Mit dem total antisymmetrischen (Pseudo-)Tensor

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1, \text{ falls } (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \text{ gerade Permutation von } (0,1,2,3) \\ -1, \text{ falls } (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \text{ ungerade Permutation von } (0,1,2,3) \\ \ \ 0, \text{ sonst} \end{cases} \tag{5.67}$$

kann man den dualen Feldstärketensor definieren:

$$\left(\tilde{F}^{\alpha\beta}\right) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.68}$$

Der duale Feldstärketensor ist ein antisymmetrischer Lorentzpseudotensor 2. Stufe. Die homogenen Maxwellgleichungen lassen sich mit dem dualen Feldstärketensor ausdrücken:

$$\partial_\beta \tilde{F}^{\beta\alpha} = 0 \qquad \begin{cases} \alpha = 0, & \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \\ \alpha = i, & \mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\dot{\vec{B}}}{c} = 0 \end{cases} \tag{5.69}$$

Damit lauten die Maxwellgleichungen für die physikalischen Felder $F^{\alpha\beta}$:

$$\boxed{\partial_\beta F^{\beta\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha(x), \qquad \partial_\beta \tilde{F}^{\beta\alpha} = 0} \qquad \text{Kovariante Maxwellgleichungen} \tag{5.70}$$

Diese Form hat Vorteile gegenüber der ursprünglichen Form:

- Die Gleichungen sind von einfacherer Struktur.
- Die Struktur der Gleichungen spiegelt die Kovarianz gegenüber Lorentztransformation wider. (Die gilt sonst auch, ist aber nicht offensichtlich.)

5.4 Relativistische Verallgemeinerung der Elektrodynamik

Angesichts der Kovarianz der Maxwellgleichungen kann man die Frage stellen, inwieweit sich die Maxwellgleichungen zwangsläufig als relativistische Verallgemeinerung der Elektrostatik ergeben.
Also: Genügen das Coulombgesetz und das Einsteinsche Relativitätsprinzip, um die Maxwellgleichungen festzulegen?

Um die Feldgleichungen der Elektrostatik zu verallgemeinern, könnte man darin einfach die Argumente $\vec{r}$ durch $\vec{r},t$ ersetzen:

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) \qquad \to \qquad \Delta\varphi(\vec{r},t) = -4\pi\rho(\vec{r},t). \tag{5.71}$$

Dies allein ergäbe allerdings ein Fernwirkungsgesetz, denn die Änderung von ρ an einer Stelle würde die sofortige Änderung von φ an einer anderen Stelle bedingen.

Nach der Speziellen Relativitätstheorie können sich Wirkungen aber maximal mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen. Das erreicht man durch die Ersetzung

$$\Delta \quad \to \quad -\Box\,. \tag{5.72}$$

Danach ist die adäquate partikuläre Lösung durch das retardierte Potenzial φ_{ret} gegeben.
Die Forderung, dass sich die Auswirkungen einer Änderung von ρ mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen, ist damit erfüllt.

Wenn man relativ zueinander bewegte IS betrachtet, führt eine Ladungsdichte zwangsläufig auch zu einer Stromdichte. Daher ist die Ladungsdichte durch die 4-Stromdichte zu ersetzen:

$$\rho \quad \to \quad \left(j^{\alpha}\right) = \left(c\rho, \vec{j}\right). \tag{5.73}$$

Entsprechend hatten wir φ durch das 4-Vektorfeld $\left(A^{\alpha}\right) = \left(\varphi, \vec{A}\right)$ ersetzt (5.55).

Lorentzkraft

Wir ergänzen die kovarianten Feldgleichungen durch die kovarianten Bewegungsgleichungen. Auf eine Punktladung wirkt die Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right). \tag{5.74}$$

Da wir diese Kraft im Rahmen der Elektrostatik und Magnetostatik eingeführt haben, ist nicht von vornherein klar, ob sie auch relativistisch (in jeder Ordnung von $\vec{v}/c$) richtig ist. Wir setzten daher zunächst nur voraus, dass die Lorentzkraft im Grenzfall $\vec{v}/c \to 0$ gilt.

Für $\vec{v}/c \to 0$ gilt das zweite Newtonsche Axiom:

$$m\frac{d\vec{v}'}{dt'} = q\vec{E}' \qquad \text{(relativistisch richtig in IS')}. \tag{5.75}$$

Dabei ist IS' das Inertialsystem, in dem das Teilchen zum betrachteten Zeitpunkt die Geschwindigkeit $\vec{v}' = 0$ hat.
Durch eine Lorentztransformation könnten wir die relativistisch gültige Bewegungsgleichung in IS erhalten, in dem das Teilchen die Geschwindigkeit $\vec{v}$ hat. Es ist aber einfacher, von der kovarianten Form der relativistischen Bewegungsgleichung auszugehen:

$$m\frac{du^\alpha}{d\tau} = f^\alpha \qquad \text{(Bewegungsgleichung aus Mechanik)}. \tag{5.76}$$

Die Ruhemasse *m* und die Eigenzeit $d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ sind Lorentzskalare.

Die 4-Geschwindigkeit ist ein Lorentzvektor:

$$\left(u^\alpha\right) = \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right) = \left(\frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \gamma\left(c, \vec{v}\right). \tag{5.77}$$

Die Minkowskikraft f^α auf der rechten Seite von (5.76) ist ebenfalls ein Lorentzvektor.

Gesucht wird nun die Minkowskikraft f^α, die das elektromagnetische Feld auf ein geladenes Teilchen ausübt. Wegen der Gleichung für die Lorentzkraft erwarten wir, dass f^α linear in der Feldstärke $F^{\alpha\beta}$, linear in der Geschwindigkeit u^α und proportional zur Ladung q ist.
Der einfachste Ansatz ergibt die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$m\frac{du^\alpha}{d\tau}=\frac{q}{c}F^{\alpha\beta}u_\beta \qquad \text{kovariante Bewegungsgleichungen.} \tag{5.78}$$

Argumentation für die Richtigkeit dieser Gleichung:

1. Die Gl. (5.78) ist kovariant. Wenn sie in einem IS richtig ist, so gilt sie auch in IS'.
2. Als spezielles Inertialsystem wählen wir das momentan mitbewegte IS'.
   In diesem IS' gilt $v'=0$, $d\tau=dt'$ und damit

   $$\left(\frac{du'^\alpha}{d\tau}\right)=\left(0,\frac{d\vec{v}'}{dt'}\right) \tag{5.79}$$

   Wegen $(u'_\alpha)=(c,0)$ in IS' wird die rechte Seite von (5.78) zu

   $$\frac{q}{c}\left(F'^{\alpha\beta}u'_\beta\right)=\frac{q}{c}\left(F'^{\alpha 0}c\right)=\left(0,q\vec{E}'\right) \tag{5.80}$$

   Die beiden letzten Gleichungen zeigen, dass die kovariante Bewegungsgleichung (5.78) in IS' zur Bewegungsgleichung (5.75) wird, also gültig ist.

Die relativistische Bewegungsgleichung (5.78) wird mit Hilfe der Geschwindigkeit $\vec{v}$ und der Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ausgedrückt: Für $\alpha=0$ und $\alpha=i$ ergibt dies:

$$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=q\vec{E}\cdot\vec{v}\ , \tag{5.81}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = q\left(\vec{E}+\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right). \tag{5.82}$$

Die Argumente der Felder sind $\vec{r}$ und t. Dabei ist für $\vec{r}$ der Ort $\vec{r}(t)$ des Teilchens einzusetzen und $\vec{v}(t) = d\vec{r}/dt$ ist die Geschwindigkeit des Teilchens.

Für $v/c << 1$ folgt die Näherung $m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\left(\vec{E}+\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)+O\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$. (5.83)

Die Lorentzkraft ist die relativistisch richtige Kraft.

Relativistische Energie

Annahme: Die Teilchen bewegen sich in einem elektrostatischen Feld $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi(r)$.

Mit

$$\frac{d}{dt}\varphi(\vec{r}(t)) = \operatorname{grad}\varphi\frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{v}\cdot\vec{E}$$

wird die Bewegungsgleichung für $\alpha = 0$ (5.81) zu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v(t)^2/c^2}}+q\varphi(\vec{r}(t))\right) = 0\,. \tag{5.84}$$

Hieraus folgt

$$\gamma mc^2 + q\varphi = \text{const.} \tag{5.85}$$

oder ausführlicher:

$$\underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{mc^2(\gamma-1)}_{\text{Kinetische Energie}} + \underbrace{q\varphi(\vec{r})}_{\text{Potenzielle Energie}} = \text{const.} \tag{5.86}$$

Dies ist eine Erhaltungsgröße, die aus den Bewegungsgleichungen abgeleitet wurde.

Aus der Bedeutung von $q\varphi$ als potenzielle Energie folgt, dass es sich um die Energie des Teilchens im Potenzial handelt. Die Energie des Teilchens ist erhalten, weil es sich in einem zeitunabhängigen Potenzial bewegt.

Die ersten beiden Terme in (5.86) werden zusammen auch als *relativistische Energie* oder *Energie des freien Teilchens* bezeichnet:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad \text{relativistische Energie.} \tag{5.87}$$

Die *kinetische Energie*

$$E_{\text{kin}} = E(v) - E(0) = mc^2(\gamma-1)$$

ist die Energie, die nötig ist, um das ruhende Teilchen auf die Geschwindigkeit v zu bringen.

Der Term

$$E(0) = mc^2 \tag{5.88}$$

ist die Ruheenergie des Teilchens – *Äquivalenz von Masse und Energie*.