Der total antisymmetrische Einheitstensor

Der ε-Tensor ist ein Tensor dritter Stufe, d. h. ein Gebilde mit drei Indizes:

$$\varepsilon_{ijk} \quad \text{mit } i, j, k \in \{1, 2, 3\}.$$

Er ist definiert durch

1. $\varepsilon_{123} = 1$ und
2. der Tensor ändert sein Vorzeichen, wenn zwei beliebige Indizes vertauscht werden (z. B. $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$). Diese Eigenschaft nennt man antisymmetrisch, daher nennt man ε auch den total antisymmetrischen Einheitstensor.

Aus diesen Definitionen folgt sofort, dass

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1 \\ \text{und} \qquad & \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1. \end{aligned}$$

Für alle anderen Kombinationen der Indizes verschwindet der Tensor, denn sind zwei Indizes gleich, so ist der Tensor gleich seinem Negativen (Definition 2), also Null. Bemerken Sie, dass bei einer zyklischen Permutation der Indizes der Tensor unverändert bleibt, da diese durch zwei Vertauschungen realisiert werden kann.
Im Folgenden werden wir die Differentialoperatoren in einer abgekürzten Schreibweise verwenden:

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Eine weitere bequeme Kurzschreibweise ist die sog. Einsteinsche Summenkonvention. Alle Indizes, die in einem Produkt doppelt auftauchen, sind Summationsindizes, über sie wird also summiert. Dies spart uns das Schreiben der Summenzeichen. Mit dieser Konvention schreibt sich die Divergenz eines Vektorfeldes folgendermaßen:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \partial_i a_i \left(= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i \right).$$

Der ε-Tensor ermöglicht es, z. B. das Kreuzprodukt sehr kompakt darzustellen. Die i-te Komponente von $\vec{a} \times \vec{b}$ ist:

$$\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k,$$

$$\begin{aligned} \text{z. B. } \left[\vec{a} \times \vec{b}\right]_1 &= \varepsilon_{1jk} a_j b_k \\ &= \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 \quad \text{(alle übrigen Summanden fallen weg!)} \\ &= a_2 b_3 - a_3 b_2. \end{aligned}$$

Ebenso lässt sich natürlich die Rotation eines Vektorfeldes darstellen:

$$[\text{rot } \vec{a}]_i = [\nabla \times \vec{a}]_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j a_k.$$

Es ist also

$$\text{div rot } \vec{a} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = \partial_i \varepsilon_{ijk}\partial_j a_k = \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j a_k.$$

Diese Summe muss aber Null sein, da ε_{ijk} antisymmetrisch und $\partial_i\partial_j$ symmetrisch ist. In anderen Worten, die Summe besteht aus Paaren von Termen, die sich gegenseitig wegheben ($\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j a_k = -\varepsilon_{jik}\partial_j\partial_i a_k$), daher verschwindet die Summe als Ganzes. Also ist notwendigerweise

$$\text{div rot } \vec{a} = 0.$$

Ganz genauso sehen wir, dass

$$[\text{rot grad } \phi]_i = [\nabla \times \nabla\phi]_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\phi = 0.$$

Für ε-Tensoren gilt folgende Summationsregel:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl},$$

wobei $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ wenn $i \neq j$. Die Gültigkeit dieser Summationsregel macht man sich klar, indem man überlegt, welche Summanden nicht verschwinden. Dies ist nur möglich wenn entweder $i = l$ und gleichzeitig $j = m$ ist oder wenn $i = m$ und gleichzeitig $j = l$ ist. Im letzteren Fall ist auf Grund der Antisymmetrie das Vorzeichen negativ.
Mit dieser Summationsregel können wir einen Ausdruck finden für $\vec{b} \times \text{rot } \vec{a}$:

$$\begin{aligned}\left[\vec{b} \times \text{rot } \vec{a}\right]_i &= \varepsilon_{ijk}b_j\varepsilon_{klm}\partial_l a_m \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\, b_j\partial_l a_m \\ &= b_j\partial_i a_j - b_j\partial_j a_i.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Summation über die Indizes l und m ausgeführt. Wegen der δ-Symbole hat diese Summation jedoch lediglich zur Folge, dass einfach ein positiver Term entsteht, in dem $l = i$ und $m = j$, und ein negativer, in dem $l = j$ und $m = i$ gesetzt wurde.
Es ist also

$$\begin{aligned}&\left[(\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} + (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + \vec{b} \times rot\ \vec{a} + \vec{a} \times rot\ \vec{b}\right]_i \\ &\qquad = b_j\partial_j a_i + a_j\partial_j b_i + b_j\partial_i a_j - b_j\partial_j a_i + a_j\partial_i b_j - a_j\partial_j b_i = b_j\partial_i a_j + a_j\partial_i b_j.\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\left[\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b})\right]_i = \partial_i(a_j b_j) = b_j\partial_i a_j + a_j\partial_i b_j.$$

Also:

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} + (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + \vec{b} \times \text{rot } \vec{a} + \vec{a} \times \text{rot } \vec{b}.$$